

# Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

## RÉSOLUTION PRATIQUE - MÉTHODES GÉNÉRALES

### Exercice 1 - Equation du second ordre à coefficients constants - L1/Math Sup - ★

1. On commence par résoudre l'équation homogène  $y'' - 2y' + y = 0$ . Son équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais  $y(x) = ax + b$  est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2a + ax + b = x \iff a = 1 \text{ et } b = 2.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x + 2).$$

Si on ajoute les conditions  $y(0) = y'(0) = 0$ , on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit  $\lambda = -2$  et  $\mu = 1$ . La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x - 2)e^x + (x + 2).$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . Son équation caractéristique est  $r^2 - 4r + 3 = 0$ , dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions  $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$ . Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme  $y(x) = (ax + b)e^{-x}$ . En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, \quad y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc  $a$  et  $b$  sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a &= 2 \\ 8b - 6a &= 1 \end{cases}$$

On résoud ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par  $y_0(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$ . Finalement, les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

3. L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque cette fois que 1 est racine simple de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution particulière sous la forme  $y(x) = (ax^2 + bx)e^x$  (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction  $x \mapsto e^x$  est solution de l'équation homogène). On dérive pour trouver

$$y'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \text{ et } y''(x) = (ax^2 + (4a + b)x + (2a + 2b))e^x.$$

Par identification,  $a$  et  $b$  sont solutions du système

$$\begin{cases} -4a = 2 \\ 2a - 2b = 1 \end{cases}$$

On obtient comme solution  $a = -1/2$  et  $b = 1$ . La solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par la formule

$$y \mapsto \left( \frac{-x^2}{2} + x \right) e^x + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. L'équation homogène  $y'' + 9y = 0$  admet pour équation caractéristique associée  $r^2 + 9 = 0$ , dont les racines sont  $3i$  et  $-3i$ . Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme  $t \mapsto \cos(3x)$  et  $t \mapsto \sin(3x)$ . On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve  $x \mapsto \frac{x+1}{9}$ . Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(3x) + B \sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition  $y(0) = 0$  entraîne  $A = -1/9$ .

5. On commence par résoudre l'équation homogène  $y'' - 2y' + y = 0$ . L'équation caractéristique associée est  $r^2 - 2r + 1 = 0$  qui admet 1 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène est donc  $(Ax + B)e^x$ .

On cherche une solution particulière de l'équation générale en utilisant le principe de superposition des solutions. On commence donc à chercher une solution de  $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$ . On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme  $P(x)e^x$ . Comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à 4. Utilisant

$$y'(x) = (P'(x) + P(x))e^x \quad y''(x) = (P''(x) + 2P'(x) + P(x))e^x,$$

on obtient

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = P''(x)e^x.$$

$y$  est donc solution de l'équation si et seulement si  $P'' = x^2 + 1$ . On obtient donc une solution particulière sous la forme

$$\left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

On cherche maintenant une solution particulière de  $y'' - 2y' + y = e^{3x}$ . Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique, et on peut chercher une solution particulière sous la forme  $y(x) = \alpha e^{3x}$ . On obtient, en introduisant dans l'équation

$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{4}.$$

Les solutions de l'équation générale de départ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \left( \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + Ax + B \right) e^x + \frac{1}{4} e^{3x}.$$

6. On résoud l'équation homogène  $y'' - 4y' + 3y = 0$ . On introduit l'équation caractéristique  $r^2 - 4r + 3 = 0$ . Ses racines sont 1 et 3. On en déduit que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière en utilisant le principe de superposition des solutions. On cherche donc d'abord une solution de  $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x$ . Puisque 1 est solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme  $y_1(x) = (ax^3 + bx^2 + cx)e^x$ . En dérivant et en identifiant, on obtient le système

$$\begin{cases} -6a &= 1 \\ 6a - 4b &= 0 \\ c + 2b &= 0 \end{cases}$$

Une solution particulière est donc obtenue par

$$y_1(x) = - \left( \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \right) e^x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = x e^{2x} \cos x$ . On va en fait chercher une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = x e^{(2+i)x}$  et on en prendra la partie réelle.  $2+i$  n'étant pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme  $y_2(x) = (ax + b)e^{(2+i)x}$ . Après dérivation et identification, on trouve le système

$$\begin{cases} -2a &= 1 \\ 2ia - 2b &= 0. \end{cases}$$

On trouve  $y_2(x) = \left( -\frac{1}{2}x - \frac{i}{2} \right) e^{(2+i)x}$ . Prenant la partie réelle, une solution particulière de  $y'' - 4y' + 3y = x e^{2x} \cos x$  est obtenue par

$$x \mapsto \left( -\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^{2x}.$$

La solution générale de l'équation différentielle initiale est donc donnée par

$$x \mapsto - \left( \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \right) e^x + \left( -\frac{x}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) e^{2x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

7. L'équation caractéristique est  $r^2 - 2r + 5 = 0$ , dont les racines sont  $1 + 2i$  et  $1 - 2i$ . La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$$x \mapsto \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x),$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x).$$

On va plutôt résoudre  $y'' - 2y' + 5y = e^{(-1+i)x}$ , puis considérer les parties réelles et imaginaires. Comme  $-1 + i$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme  $y_0(x) = ae^{(-1+i)x}$ . On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation

$$((-1 + i)^2 - 2(-1 + i) + 5)a = 1.$$

Il vient  $a = 1/(7 - 4i) = (7 + 4i)/65$ . Une solution particulière de  $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin(x)$  est alors donnée par

$$-4\Re\left(ae^{(-1+i)x}\right) + 7\Im\left(ae^{(-1+i)x}\right) = e^{-x} \sin x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x).$$

On cherche de la même façon à résoudre  $y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$ . Comme  $1 + 2i$  est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme  $axe^{(1+2i)x}$ , dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire. On trouve finalement que  $xe^x \cos(2x)$  est solution de  $y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$ . Finalement, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$x \mapsto xe^x \cos(2x) + e^{-x} \sin x + \lambda e^x \cos(2x) + \mu e^x \sin(2x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

### Exercice 2 - Changement de fonction inconnue - et on retrouve des coefficients constants... - L1/Math Sup - \*

On a  $z' = xy' + y$  et  $z'' = xy'' + 2y'$ . Ainsi,  $z$  vérifie l'équation

$$z'' + 2z' + z = 0.$$

L'équation caractéristique est  $r^2 + 2r + 1$  dont 1 est racine double. Ainsi,  $z$  vérifie  $\lambda xe^{-x} + \mu e^{-x}$ . On en déduit que les solutions de l'équation initiale sur  $]0, +\infty[$  ou sur  $] -\infty, 0[$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu \frac{e^{-x}}{x}.$$

Soit maintenant  $y$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Alors, il existe des constantes  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-x} + \mu_1 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } t > 0 \\ \lambda_2 e^{-x} + \mu_2 \frac{e^{-x}}{x} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

Pour que  $y$  admette une limite en 0, il est nécessaire que  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , puis que  $\lambda_1 = \lambda_2$  pour que les limites à droite et à gauche coïncident. Les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-x}.$$

### Exercice 3 - Changement de variable - et on retrouve des coefficients constants...

- L1/Math Sup - ★★

1. Posons  $t = e^x$ , puis  $z(t) = y(x)$  soit  $z(e^x) = y(x)$ . On en déduit

$$y'(x) = e^x z'(e^x) \text{ puis } y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x).$$

Si  $y$  vérifie l'équation différentielle, alors  $z$  vérifie l'équation

$$e^{2x} z''(t) - e^{2x} z(t) = e^{3x}$$

soit

$$z'' - z = t.$$

On résoud maintenant très facilement cette équation. Les solutions de l'équation homogène sont

$$z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

La fonction  $t \mapsto -t$  est solution particulière de l'équation, et donc la solution générale de l'équation vérifiée par  $z$  est de la forme

$$z(t) = -t + \lambda e^t + \mu e^{-t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Revenant à  $y$ , on trouve

$$y(x) = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation de départ est définie sur chaque intervalle  $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ . Puisque les fonctions intervenant dans l'équation différentielle sont  $\pi$ -périodiques, on peut se contenter de résoudre l'équation sur  $]-\pi/2, \pi/2[$  et il est légitime de poser  $t = \sin x$  puisque  $\sin$  définit une bijection de  $]-\pi/2, \pi/2[$  sur  $]-1, 1[$ . Soit  $z$  défini par  $z(t) = y(x)$ , ie  $y(x) = z(\sin x)$ . On dérive :

$$y'(x) = z'(\sin x) \cos x \implies y'(x) \tan x = z'(t) \sin x = tz'(t).$$

On dérive une seconde fois :

$$y''(x) = z''(\sin x) \cos^2 x - z'(\sin x) \sin(x) = z''(t)(1 - t^2) - tz'(t).$$

L'équation devient

$$(1 - t^2)z'' - (1 - t^2)z = 0 \implies z'' - z = 0,$$

la simplification étant légitime puisque  $(1 - t^2) > 0$  sur  $]-1, 1[$ . On obtient  $z(t) = \lambda e^t + \mu e^{-t}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , et donc en revenant à  $y$ , on trouve

$$y(x) = \lambda e^{\sin x} + \mu e^{-\sin x}.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

3. On résout l'équation sur  $]0, +\infty[$ , et on pose  $z(t) = y(e^t)$ . Il vient  $z'(t) = e^t y'(e^t)$  et  $z''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t)$ . Or, si  $y$  est solution de l'équation différentielle, on a  $e^{2t} y''(e^t) + y(e^t) = 0 \implies z'' - z' + z = 0$ . On résout cette équation : l'équation caractéristique est  $r^2 - r + 1 = 0$ , dont les racines sont  $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ . La solution générale de l'équation vérifiée par  $z$  est donc donnée par

$$z(t) = \lambda e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

En revenant à  $y$ , on trouve que les solutions sur  $]0, +\infty[$  sont les fonctions de la forme

$$y(x) = z(\ln x) = \lambda \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \mu \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right).$$

4. On pose  $x = \sin(t)$  avec  $t \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , et  $z(t) = y(x)$ , ie  $z(t) = y(\sin t)$ . Il vient

$$y'(t) = \cos(t)y'(\sin t) \text{ et } y''(t) = \cos^2(t)y''(\sin t) - \sin(t)y'(\sin t).$$

L'équation initiale se traduit en

$$\cos^2(t)y''(\sin t) - \sin(t)y'(\sin t) + y(\sin t) = 0 \implies z'' + z = 0.$$

La solution générale est donnée par

$$z(t) = \lambda \sin(t) + \mu \cos(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En revenant à  $y$  et  $x$ , on trouve que

$$y(x) = \lambda \sin(\arcsin x) + \mu(\cos(\arcsin x)) = \lambda x + \mu \sqrt{1-x^2}.$$

Pour résoudre l'équation sur  $]1, +\infty[$ , on aurait pu considérer le changement de variables  $y = \cosh(t)$ .

### Exercice 4 - Varions la constante... - L2/Math Spé - ★★

On résoud d'abord l'équation homogène sans second membre  $y'' + 4y = 0$ . On peut introduire l'équation caractéristique  $r^2 + 4 = 0$ , ou directement remarquer par analogie avec l'équation classique  $y'' + y = 0$  que les fonctions  $y_1 : t \mapsto \sin(2t)$  et  $y_2 : t \mapsto \cos(2t)$  sont solutions. Pour déterminer une solution de l'équation avec second membre, on applique la méthode de variation de la constante en cherchant une solution qui s'écrit :  $y(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$ . Attention, puisqu'ici on a affaire à une équation du second degré, les fonctions dérivées  $\lambda_1'$  et  $\lambda_2'$  doivent vérifier le système

$$\begin{cases} \lambda_1'(t)y_1(t) + \lambda_2'(t)y_2(t) &= 0 \\ \lambda_1'(t)y_1'(t) + \lambda_2'(t)y_2'(t) &= \tan(t) \end{cases}$$

(si cela n'est pas clair, consultez d'urgence votre cours!). On remplace  $y_1$  et  $y_2$  par leurs valeurs respectives, et on trouve le système

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) \sin(2t) + \lambda_2'(t) \cos(2t) &= 0 \\ \lambda_1'(t) \cos(2t) - \lambda_2'(t) \sin(2t) &= \frac{1}{2} \tan(t). \end{cases}$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

Il vient

$$\lambda_1'(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1 - \sin(t)}{2 \cos(t)}$$

en utilisant  $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$ . La dernière partie du membre de droite est de la forme  $u'/u$ . On peut intégrer et on trouve, à une constante près,

$$\lambda_1(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos t).$$

De même, on trouve

$$\lambda_2'(t) = -\sin^2(t) = -\frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$$

soit

$$\lambda_2(t) = -\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t).$$

### Exercice 5 - Abaissement de l'ordre - L2/Math Spé/Aggeg interne - ★★

1. Soit  $P$  un polynôme solution de  $(E)$ , et  $a_n t^n$  son coefficient dominant. Alors le coefficient dominant de  $(t^2 + t)P'' + (t - 1)P' - P$  est  $(n(n - 1) + n - 1)a_n t^n$ . Puisque  $P$  est solution de  $(E)$ , il faut donc que  $n(n - 1) + n - 1 = 0$ , ce qui entraîne  $n = 1$ . On cherche donc une solution de la forme  $P(t) = at + b$ . On procède par identification et on trouve facilement que les seules solutions polynômiales sont les polynômes de la forme  $P(t) = \lambda(t - 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. On se ramène à une équation d'ordre 1, en posant  $y(t) = \frac{x(t)}{t-1}$  (c'est possible puisqu'on travaille sur  $]1, +\infty[$ ). On obtient donc  $x' = (t - 1)y' + y$  et  $x'' = (t - 1)y'' + 2y'$ , et donc  $x$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y$  vérifie

$$(t^2 + t)(t - 1)y'' + (2(t^2 + t) + (t - 1)^2)y' = 0.$$

On écrit alors  $\frac{y''}{y'}$  sous forme d'une fraction rationnelle qu'on décompose en éléments simples, et on trouve :

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{-2}{t - 1} - \frac{2}{t + 1} + \frac{1}{t}.$$

On intègre, et on trouve qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que

$$\ln(y'(t)) = \ln\left(\frac{t}{(t - 1)^2(t + 1)^2}\right) + C.$$

Passant à l'exponentielle, il existe  $\lambda > 0$  tel que

$$z'(t) = \frac{\lambda t}{(t^2 - 1)^2}$$

puis intégrant, il existe  $\alpha > 0$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tel que

$$z(t) = \frac{\alpha}{(1 - t^2)} + \mu$$

ce qui donne pour solutions de l'équation initiale

$$x(t) = -\frac{\alpha}{t + 1} + \mu(t - 1).$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

3. La méthode est exactement identique. Cette fois, on trouve qu'un polynôme solution de l'équation homogène est forcément de degré 2, et  $x \mapsto x^2$  est solution. On applique la méthode d'abaissement de l'ordre en posant  $y = x^2 u$ .  $u$  est solution de

$$xu'' + u' = 1$$

d'où on trouve  $u$  et finalement  $y$  :

$$y(x) = \lambda x^2 \ln x + \mu x^2 + x^3,$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 6 - Avec de l'algèbre linéaire - L2/Math Spé - ★★

1. Fixons  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors, pour  $f \in E$ , on a

$$\phi(f) = \lambda f \iff f' + (t - \lambda)f = 0.$$

Par la théorie des équations différentielles linéaires, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension 1. On peut de plus résoudre facilement cette équation. En effet, elle devient

$$\frac{f'}{f} = -t + \lambda \implies \ln |f(t)| = -t^2 + \lambda t + C$$

et donc l'ensemble des solutions est donnée par les multiples de la fonction

$$f_\lambda(t) = e^{-t^2/2} e^{\lambda t}.$$

Tous les nombres complexes sont donc valeurs propres de  $\phi$ , l'espace propre associé étant la droite vectorielle de direction  $f_\lambda$ .

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si  $\lambda \neq 0$ , alors il existe un nombre complexe  $\mu \neq 0$  tel que  $\lambda = \mu^2$ . Mais alors, le polynôme  $X^2 - \lambda$  se factorise en  $(X - \mu)(X + \mu)$ . On s'intéresse ici à  $\ker(\phi^2 - \lambda Id)$ . Par le théorème de décomposition des noyaux (les polynômes  $X - \mu$  et  $X + \mu$  sont premiers entre eux car  $\mu \neq -\mu$ ), et donc

$$\ker(\phi^2 - \lambda Id) = \ker(\phi + \mu Id) \oplus \ker(\phi - \mu Id).$$

On en déduit que si  $\lambda = \mu^2 \neq 0$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de  $\phi^2$ , d'espace propre de dimension 2 engendré par les deux fonctions  $f_\mu$  et  $f_{-\mu}$ .

Enfin, si  $\lambda = 0$ , alors  $\phi^2(f) = 0$  équivaut à

$$(f' + tf)' + t(f' + tf) = 0 \iff f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f = 0.$$

Il faut alors résoudre cette équation d'ordre 2. Une façon de procéder est de remarquer que l'on connaît déjà une solution, la fonction  $y(t) = e^{-t^2/2}$ , puisque un élément de  $\ker(\phi)$  est nécessairement un élément de  $\ker(\phi^2)$ . On peut alors en déduire une deuxième solution indépendante par la méthode d'abaissement de l'ordre. Sinon, on peut aussi remarquer que

$$\phi^2(f) = 0 \implies \phi(f) \in \ker(\phi) \implies f' + tf = ae^{-t^2/2}.$$

On résout alors cette équation du premier ordre, le problème étant de trouver une solution particulière. Mais il est facile de remarquer que la fonction  $t \mapsto te^{-t^2/2}$  convient. Finalement, on a aussi prouvé que 0 est une valeur propre de  $\phi^2$ , le sous-espace propre associé étant engendré par les fonctions  $t \mapsto e^{-t^2/2}$  et  $t \mapsto te^{-t^2/2}$ .

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

3. On a déjà remarqué que

$$\phi^2(f) = f'' + 2tf' + (t^2 + 1)f.$$

L'équation correspond donc à  $\phi^2(y) = -2y$ , c'est-à-dire qu'on cherche le sous-espace propre associé à  $-2$  de l'endomorphisme  $\phi^2$ . Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{-t^2/2}(ae^{it\sqrt{2}} + be^{-it\sqrt{2}}), \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Si on cherche les solutions réelles, on trouve

$$t \mapsto e^{-t^2/2}(a \cos(t\sqrt{2}) + b \sin(t\sqrt{2})), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

### POLYNÔMES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

#### Exercice 7 - Solutions polynômiales - L1/Math Sup - ★

Soit  $P$  une fonction polynôme non-nulle solution de l'équation, de coefficient dominant  $a_n x^n$ . Alors  $(x^2 - 3)P'' - 4xP' + 6P$  est une fonction polynôme de degré au plus  $n$ , dont le coefficient devant  $x^n$  est

$$n(n-1)a_n - 4na_n + 6a_n = a_n(n^2 - 5n + 6).$$

Ce coefficient doit être nul. Or,  $a_n \neq 0$ . C'est donc que  $n^2 - 5n + 6 = 0$ , ou encore que  $n = 2$  ou  $n = 3$ . On cherche donc les polynômes solution sous la forme  $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ .  $P$  est solution de l'équation si et seulement si les coefficients vérifient le système

$$\begin{cases} -18a_3 + 2a_1 = 0 \\ -6a_2 + 6a_0 = 0 \end{cases}$$

Les polynômes solution sont donc ceux qui s'écrivent

$$\lambda(x^3 + 9x) + \mu(x^2 + 1).$$

Comme les deux fonctions  $x \mapsto x^3 + 9x$  et  $x \mapsto x^2 + 1$  sont linéairement indépendantes, on a donc résolu l'équation sur tout intervalle où  $x^2 - 3$  ne s'annule pas. Recollons maintenant les solutions.

Soit  $f$  une solution sur  $\mathbb{R}$ . Il existe six constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  telles que, si  $f$  est solution de l'équation sur  $\mathbb{R}$ , alors on a

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1(x^3 + 9x) + \mu_1(x^2 + 1) & \text{si } x < -\sqrt{3} \\ \lambda_2(x^3 + 9x) + \mu_2(x^2 + 1) & \text{si } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ \lambda_3(x^3 + 9x) + \mu_3(x^2 + 1) & \text{si } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Puisque  $f$  est  $C^2$  en  $\sqrt{3}$ , on doit avoir,

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f(x) = 12\sqrt{3}\lambda_2 + 4\mu_2 = 12\sqrt{3}\lambda_3 + 4\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f(x)$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

et

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f'(x) = 18\lambda_2 + 2\sqrt{3}\mu_2 = 18\lambda_3 + 2\sqrt{3}\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f'(x).$$

Cette dernière équation n'apporte pas d'informations supplémentaires, car elle est obtenue en multipliant la première par  $\sqrt{3}/2$ . En revanche, si on calcule une dérivée supplémentaire, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} f''(x) = 3\sqrt{3}\lambda_2 + 2\mu_2 = 3\sqrt{3}\lambda_3 + 2\mu_3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} f''(x).$$

On en tire  $\lambda_2 = \lambda_3$  et  $\mu_2 = \mu_3$ . En examinant le problème en  $-\sqrt{3}$ , on voit qu'on doit aussi avoir  $\lambda_2 = \lambda_1$  et  $\mu_2 = \mu_1$ . Finalement, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda(x^3 + 9x) + \mu(x^2 + 1)$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 8 - Avec des séries entières - L2/Math Spé - ★

1. Il faut étudier quelles conditions il faut mettre sur  $a, b, c$  et  $d$  pour que ceci définisse une solution de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . La continuité de  $y$  en 0 entraîne que  $a = c$  puisque

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) \text{ et } c = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x).$$

De plus, on a

$$y'(x) = -2ax \sin(x^2) + 2bx \cos(x^2) \text{ si } x > 0.$$

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2b \cos(x^2) - 4bx^2 \sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

De même, on a

$$y''(x) = -2a \sin(x^2) - 4ax^2 \cos(x^2) + 2d \cos(x^2) - 4dx^2 \sin(x^2) \text{ si } x > 0.$$

Remarquons que

$$b = \lim_{x \rightarrow 0^+} y''(x) \text{ et } d = \lim_{x \rightarrow 0^-} y''(x).$$

Pour que  $y''$  soit continue en 0, il est nécessaire que  $b = d$ . Réciproquement la fonction  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$  définit bien une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière solution de (E) de rayon de convergence  $R > 0$ . On introduit ce développement en série entière dans (E). Après dérivation terme à terme de la série, et réindexation des séries, on obtient :

$$xy'' - y' + 4x^3y = -a_1 + 3a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} (a_{n+1}(n-1)(n+1) + 4a_{n-3})x^n = 0$$

pour tout  $x \in ]-R, R[$ . L'unicité du développement en série entière entraîne que  $a_1 = a_3 = 0$ , tandis que, pour tout  $n \geq 3$ ,

$$a_{n+1} = -\frac{4}{(n-1)(n+1)} a_{n-3}.$$

En réindexant, on trouve, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$a_{n+4} = -\frac{4}{(n+2)(n+4)} a_n.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

3. D'après la relation de récurrence précédente, et puisque  $a_1$  et  $a_3$  sont nuls, on trouve que  $a_{4p+1} = 0$  et  $a_{4p+3} = 0$  pour tout  $p \geq 0$ .
4. La relation de récurrence nous dit que

$$a_{4p} = -\frac{4}{(4p)(4p-2)}a_{4(p-1)} = \frac{-1}{2p(2p-1)}.$$

On prouve alors aisément par récurrence que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

De même, on obtient

$$a_{4p+2} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}a_2.$$

5. En appliquant la règle de d'Alembert, ou en remarquant que  $\frac{R^p}{(2p)!}$  tend vers 0 lorsque  $p$  tend vers l'infini, pour tout  $R \in \mathbb{R}$ , on obtient que la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ . De plus, on a

$$\begin{aligned}y(x) &= a_0 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{4p} + a_1 \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{4p+2} \\ &= a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2).\end{aligned}$$

6. Puisque la série entière obtenue a pour rayon de convergence  $+\infty$ , sa somme est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, sur chaque intervalle ne contenant pas 0, on sait que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est un espace vectoriel de dimension 2. Il est donc nécessairement engendré par  $\cos(x^2)$  et  $\sin(x^2)$ . Considérons maintenant une solution  $y$  de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Elle est solution sur  $]0, +\infty[$ , et donc il existe deux constantes  $a_0$  et  $a_2$  telles que

$$y(x) = a_0 \cos(x^2) + a_2 \sin(x^2) \text{ pour } x > 0.$$

Elle est solution sur  $] -\infty, 0[$  et donc il existe deux constantes  $b_0$  et  $b_2$  telles que

$$y(x) = b_0 \cos(x^2) + b_2 \sin(x^2) \text{ pour } x < 0.$$

D'après la question préliminaire,  $y$  va se prolonger en une fonction de classe  $C^2$  si et seulement si  $a_0 = b_0$  et  $a_2 = b_2$ . Ainsi, l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation est l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les fonctions  $x \mapsto a \cos(x^2) + b \sin(x^2)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 9 - Solutions DSE puis abaissement de l'ordre - L2/Math Spé - \*\*

1. On cherche une solution développable en série entière, qui s'écrit donc  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . On introduit ceci dans l'équation

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 0.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

On réindexe la troisième somme pour retrouver une somme faisant apparaître un terme en  $x^{n-1}$ . On trouve

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^{n-1} = 0.$$

On en déduit  $a_1 = 0$ , puis, pour  $n \geq 2$ ,

$$n(n+1)a_n = a_{n-2}.$$

On en déduit que, pour tout entier  $p$ ,  $a_{2p+1} = 0$  alors

$$a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p+1)2p} = \dots = \frac{a_0}{(2p+1)!}.$$

Comme la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!}$  a pour rayon de convergence  $+\infty$ , on trouve que la fonction

$$f(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{x^{2p}}{(2p+1)!} = \frac{\sinh(x)}{x}$$

est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation.

On résout alors l'équation sur  $]0, +\infty[$  ou sur  $] -\infty, 0[$  (où on sait que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2) par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose  $y(x) = f(x)z(x)$ . Sachant que  $f$  est solution de l'équation, on trouve que  $y$  est aussi solution si et seulement si  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$2xf'z' + xzz'' + 2fz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en  $z'$ , que l'on sait résoudre. Remplaçant  $f$  par sa valeur, on trouve

$$2 \cosh x z' + \sinh x z'' = 0 \implies \frac{z''}{z'} = -2 \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Il vient

$$z' = \frac{\lambda}{\sinh^2 x}$$

puis

$$z = \frac{\lambda \cosh x}{\sinh x} + \mu.$$

Finalement, toute solution sur  $]0, +\infty[$  s'écrit sous la forme

$$y(x) = \mu \frac{\sinh x}{x} + \lambda \cosh x.$$

Si on cherche maintenant les solutions sur  $\mathbb{R}$  tout entier, il faut procéder par recollement. Si  $y$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \mu_1 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_1 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu_2 \frac{\sinh x}{x} + \lambda_2 \frac{\cosh x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En étudiant la limite de  $\cosh x/x$  en zéro, et sachant que  $y$  doit être continu en 0, on voit que  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . D'autre part, puisque  $\sinh x/x \rightarrow 1$  en 0, la continuité de  $y$  en 0 impose alors que  $\mu_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \mu_2$ . Ainsi, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation sont les fonctions  $x \mapsto \mu \frac{\sinh x}{x}$ .

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

2. On recopie la même méthode, en posant  $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Si on introduit dans l'équation, on trouve

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$

On change les indices dans la deuxième somme pour trouver :

$$\sum_{n \geq 2} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n \geq 1} n(n+1)a_{n+1} x^n + 3 \sum_{n \geq 1} n a_n x^n + \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 0.$$

Par identification, on trouve  $a_0 = 0$ ,  $a_2 = 2a_1$ , puis, pour  $n \geq 2$  :

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n.$$

Ainsi, par récurrence, on trouve  $a_n = n a_1$ . Puisque la série entière  $\sum_{n \geq 1} n x^n$  a pour rayon de convergence 1, on a prouvé que la fonction

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

est solution de l'équation sur  $] -1, 1[$  (en réalité, sur  $] -\infty, 1[$ ).

On va ensuite résoudre l'équation sur  $]0, 1[$ , par la méthode d'abaissement de l'ordre. Pour cela, on pose  $y(x) = f(x)z(x)$ . Sachant que  $f$  est solution de l'équation, on trouve que  $y$  est aussi solution si et seulement si  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$2x(x-1)f'z' + x(x-1)fz'' + 3xfz' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en  $z'$ , que l'on sait résoudre. Remplaçant  $f$  par sa valeur, simplifiant par  $x$ , et après regroupement, on trouve

$$z'(x-2) = x(1-x)z''.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x-2}{x(1-x)} = -\frac{2}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Ceci s'intègre en

$$z' = \lambda \frac{1-x}{x^2} = \lambda \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right).$$

On intègre encore une fois pour trouver  $z$ . Quitte à changer  $\lambda$  en  $-\lambda$ , il vient :

$$z = \lambda \left( \frac{1}{x} + \ln x \right) + \mu.$$

Les solutions de l'équation sur  $]0, 1[$  sont donc les fonctions

$$y(x) = \frac{\mu x + \lambda(1 + x \ln x)}{(1-x)^2}.$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

Si on cherche les solutions sur  $\mathbb{R}$ , il faut au moins que la fonction ait une limite en 1. Faisons le développement limité du numérateur, en posant  $x = 1 - h$ . Il vient

$$\begin{aligned} N(x) &= \mu(1-h) + \lambda(1 + (1-h)\ln(1-h)) \\ &= \mu - \mu h + \lambda(1 + (1-h)(-h - h^2/2 + o(h^2))) \\ &= \mu - \mu h + \lambda(1 - h + h^2/2 + o(h^2)) \\ &= (\mu + \lambda) - (\mu + \lambda)h + \lambda h^2/2 + o(h^2) \end{aligned}$$

Puisque le dénominateur est  $h^2$ , la fonction admet une limite en 1 si et seulement si  $\lambda = -\mu$ . D'autre part, il faut que la fonction soit dérivable en 0. Mais, du fait de la présence du terme  $x \ln x$ , dont le taux d'accroissement en 0 tend vers  $-\infty$ , la fonction ne peut être dérivable que si  $\lambda = 0$ . Ainsi, la seule solution sur  $\mathbb{R}$  est la fonction nulle!

### Exercice 10 - DSE, changement de variables, recollement - Math Spé/L2/Agreg interne - ★★★

1. Soit  $y(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$  une solution de l'équation développable en série entière. Alors, on a

$$2xy'' - y' + x^2y = -a_1 + 2a_2x + \sum_{i=2}^{+\infty} ((i+1)(2i-1)a_{i+1} + a_{i-2})x^i = 0.$$

Par unicité du développement en série entière, on trouve  $a_1 = a_2 = 0$  et la formule de récurrence

$$a_{i+1} = -\frac{1}{(i+1)(2i-1)}a_{i-2}.$$

On a donc, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0$  et

$$a_{3k} = -\frac{1}{3k(6k-3)}a_{3k-3} = -\frac{1}{9k(2k-1)}a_{3k-3}.$$

Par récurrence,

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k}{9^k k! (2k-1) \times (2k-3) \cdots \times 3 \times 1} a_0 = \frac{(-1)^k 2^k k!}{9^k k! (2k)!} a_0 = \frac{(-1)^k 2^k}{9^k (2k)!} a_0.$$

Réciproquement, pour tout  $a_0$  dans  $\mathbb{R}$ , la série entière

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{9^k (2k)!} x^{3k}$$

a pour rayon de convergence  $+\infty$  et est solution de l'équation différentielle.

Si on cherche maintenant à identifier à une fonction classique, le terme  $\frac{x^{3k}}{(2k)!}$  nous met sur la voie. Cela ressemble au terme général de  $\cos(x)$ , ou plutôt de  $\cos(x^{3/2})$ . Comme ceci n'est défini que pour  $x > 0$ , il faut aussi considérer  $\cosh((-x)^{3/2})$  pour  $x < 0$ . Avec une homothétie pour obtenir  $\frac{2^k}{9^k}$ , on trouve finalement que

$$y(x) = \begin{cases} a_0 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ a_0 \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

2. La forme de la solution trouvée précédemment nous conduit au changement de variables  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}$  pour  $x > 0$ , c'est-à-dire à chercher l'équation différentielle vérifiée par  $z(t) = y(x)$ . Or,

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z'(t)$$

et

$$y''(x) = \frac{1}{2}xz''(t) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}z'(t).$$

On trouve donc

$$2xy'' - y' + x^2y = x^2z'' + \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' - \frac{\sqrt{2}}{2}x^{1/2}z' + x^2z = 0.$$

$z$  vérifie donc l'équation différentielle  $z'' + z = 0$ , et donc  $z = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$  pour  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Autrement dit, la solution générale de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$  est donnée par :

$$y(x) = \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour résoudre l'équation sur  $] -\infty, 0[$ , on pose cette fois  $t = \frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}$ . La fonction  $z(t) = y(x)$  vérifie l'équation différentielle  $z'' - z = 0$ , et donc la solution générale sur  $] -\infty, 0[$  est donnée par

$$y(x) = \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

3. Soit  $y$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on sait qu'il existe des constantes  $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$  telles que

$$y(x) = \begin{cases} \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) & \text{pour } x > 0 \\ \lambda' \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) + \mu' \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(-x)^{3/2}\right) & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Comme  $y$  est continue en 0 et que  $\lim_{0^+} y = \lambda$  alors que  $\lim_{0^-} y = \lambda'$ , on en déduit que  $\lambda = \lambda'$ . D'autre part, pour  $x > 0$ , on note  $y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x)$ . On a

$$y_2''(x) = \left(\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right)\right)'' = -\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4x^{1/2}}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\right).$$

Pour  $x \rightarrow 0$ , ceci tend vers  $+\infty$ . Or, puisqu'une solution de  $(E)$  est de classe  $C^2$ , on sait que  $y''(x)$  admet une limite (finie) quand  $x$  tend vers 0, et que  $y_1$  se prolonge en fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $\lim_0 y_1''$  existe (et est finie). Puisque  $\lim_{0^+} y'' = \lambda \lim_{0^+} y_1'' + \mu \lim_{0^+} y_2''$ , ceci ne peut être fini que si  $\mu = 0$ . De même, on trouve que  $\mu' = 0$ . Les seules solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E)$  sont donc celles données par la première question.

### Exercice 11 - Séries de Fourier et équations différentielles - L2/L3/Math Spé - ★★★

On rappelle que d'après le théorème de Cauchy, l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  de cette équation est un espace vectoriel de dimension 2. Faisons un raisonnement par analyse-synthèse pour déterminer les solutions  $2\pi$ -périodiques. Soit  $f$  une solution  $2\pi$ -périodique de l'équation

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

différentielle. La relation  $f'' = -e^{it}f$  fait qu'une récurrence élémentaire prouve que  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Ainsi,  $f$ , ainsi que toutes ses dérivées, sont développables en séries de Fourier, et la convergence de ces séries est normale sur  $\mathbb{R}$ . Ecrivons donc  $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ , et  $f''(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^2 c_n(f)e^{int}$  (cette dérivation sous le signe somme étant justifiée par le fait que  $f$  est  $C^\infty$ , ces coefficients de Fourier décroissent vers 0 à l'infini plus rapidement que n'importe quel  $1/n^k$ ). Introduisant cela dans l'équation différentielle, on trouve :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f)) e^{int} = 0.$$

Ce dernier développement est encore normalement convergent, donc ses coefficients de Fourier sont les coefficients de Fourier de sa somme. Celle-ci étant la fonction nulle, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_{n-1}(f) - n^2 c_n(f) = 0.$$

On en déduit, pour tout  $n \geq 0$ ,  $c_n(f) = \frac{c_0(f)}{(n!)^2}$ , et pour tout  $n < 0$ ,  $c_n(f) = 0$ . Nécessairement,  $f$  s'écrit donc

$$f(t) = c_0(f) \sum_{n \geq 0} \frac{e^{int}}{(n!)^2}.$$

Réciproquement, soit  $f$  une telle fonction. La croissance très rapide de la factorielle vis-à-vis des polynômes entraîne par application des théorèmes usuels que  $f$  est de classe  $C^\infty$ , les expressions des dérivées successives s'obtenant en dérivant sous le signe somme. En remontant les calculs faits dans la partie analyse, on constate assez facilement que  $f$  vérifie bien l'équation différentielle. L'ensemble des solutions  $2\pi$ -périodiques de l'équation différentielle est donc un sous-espace vectoriel de dimension 1.

### APPLICATIONS

#### Exercice 12 - Presqu'une équation différentielle - L1/Math Sup - ★★

Par récurrence, toute solution est de classe  $C^\infty$ . Il est donc légitime de dériver cette équation, et on trouve

$$f''(x) = -f'(\lambda - x) = -f(\lambda - (\lambda - x)) = -f(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $f'' + f = 0$ . Il existe donc des constantes  $C$  et  $\theta$  telles que

$$f(x) = C \cos(x + \theta).$$

De  $f'(x) = f(\lambda - x)$ , on trouve, pour  $C \neq 0$ ,

$$-\sin(x + \theta) = \cos(\lambda - x + \theta)$$

soit

$$\cos(\pi/2 + \theta + x) = \cos(\lambda - x + \theta).$$

Faisons  $x = 0$ . On a donc ou bien

$$\pi/2 + \theta = \lambda + \theta - 2k\pi$$

## Exercices - Equations différentielles linéaires du second ordre - Résolution - applications : corrigé

---

et donc  $\lambda = \pi/2 + k\pi$ , ou bien

$$\pi/2 + \theta = -\lambda - \theta + 2k\pi$$

et donc

$$\theta = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Dans ce dernier cas, on vérifie facilement que la fonction va satisfaire l'équation demandée. Dans le premier, ie  $\lambda = \pi/2 + 2k\pi$ , on a une solution ssi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$-\sin(x + \theta) = \cos(\pi/2 - x + \theta) \iff \sin(-x - \theta) = \sin(x - \theta)$$

et cette dernière égalité est impossible à assurer pour toute valeur de  $x$ , et ce quelle que soit la valeur de  $\theta$ . En résumé, les solutions sont les fonctions

$$f(x) = C \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad k = 0, 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### Exercice 13 - Presqu'une équation différentielle - L1/Math Sup - \*\*

Soit  $f$  une solution de cette équation. Alors, on a pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = e^x - f(-x)$ . Ainsi, la fonction  $f'$  est de classe  $C^1$  et donc  $f$  est de classe  $C^2$ . Dérivant cette équation, on trouve

$$f''(x) - f'(-x) = e^x.$$

Or,  $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$ , et donc l'équation devient

$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

On résoud alors cette équation différentielle linéaire du second ordre. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions  $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Une solution particulière est donnée par la fonction cosh. Ainsi, si  $f$  est solution de l'équation initiale, on sait qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \cosh(x).$$

Ici, il faut prendre garde au fait que l'on n'a pas procédé par équivalence. En effet, on a dérivé l'équation, et rien ne dit que toute solution de l'équation différentielle du second ordre est une solution de l'équation initiale. On doit vérifier pour quelles valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$  c'est effectivement le cas. On a :

$$f'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x + \sinh x$$

et on doit donc avoir, pour tout réel  $x$

$$(-\lambda - \mu) \sin x + (\mu + \lambda) \cos x + e^x = e^x.$$

Si on fait  $x = 0$ , on trouve que  $\mu = -\lambda$ . Et réciproquement, toute fonction  $x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x) + \cosh x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est solution de l'équation.