Exercices - Equations différentielles linéaires du premier ordre - Résolution - applications : corrigé

Résolution pratique

Exercice 1 - **Premier ordre, à coefficients constants** - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On résoud d'abord l'équation sans second membre $7y' + 2y = 0$. La solution générale est de la forme $y(x) = Ke^{-2x/7}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. Si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors P est une solution de l'équation si et seulement si
$$7(3ax^2 + 2bx + c) + 2(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$
Par identification, on trouve le système
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2a &=& 2\\ 21a+2b &=& -5\\ 14b+2c &=& 4\\ 7c+2d &=& -1\end{array}\right.$$
On résoud ce système et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $x^3 - 13x^2 + 93x - 326$. L'ensemble des solutions de l'équation est donnée par les fonctions
$$x \mapsto x^3 - 13x^2 + 93x - 326 + Ke^{-2x/7} \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$
2. On résoud l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ dont la solution générale est λe^{-2x}. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2, $y(x) = ax^2 + bx + c$. Sans difficulté, on trouve $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.
3. On résoud d'abord l'équation sans second membre $y' + y = 0$ qui donne $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution de l'équation complète sous la forme $y(x) = P(x)e^{-x}$, avec P un polynôme. y est solution de l'équation si et seulement si $P'(x)e^{-x} - P(x)e^{-x} + P(x)e^{-x} = xe^{-x}$, si et seulement si $P'(x) = x$. Une solution particulière de l'équation complète est donc $\frac{x^2}{2}e^{-x}$, l'ensemble des solutions de l'équation étant donné par les fonctions
$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{-x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$
4. La solution générale de l'équation sans second membre est $y(x) = Ke^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$. Ensuite, on cherche une solution particulière de l'équation $y' - 2y = \cos x$. Pour cela, on écrit que $\cos x = \Re e(e^{ix})$ et on cherche une solution de $y' - 2y = e^{ix}$. On la cherche sous la forme d'une exponentielle-polynôme de degré 0, puisque $i \neq 2$. La fonction $y(x) = \alpha e^{ix}$ est solution de $y' - 2y = e^{ix}$ si et seulement si
$$i\alpha e^{ix} - 2\alpha e^{ix} = e^{ix}$$
ie si et seulement si $\alpha = -\frac{2+i}{5}$. Une solution particulière de $y' - 2y = \cos x$ est donc donnée par
$$\Re e\left(\frac{2+i}{5}e^{ix}\right) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

On cherche ensuite une solution particulière de $y'-2y=2\sin x$ en utilisant exactement la même méthode, mais en remarquant que cette fois $\sin x=2\Im m(e^{ix})$. Une solution particulière est donc donnée par

$$2\Im m\left(\frac{2+i}{5}e^{ix}\right)=-\frac{4}{5}\sin x-\frac{2}{5}\cos x.$$

Par le principe de superposition des solutions, on trouve finalement que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donnée par les fonctions

$$x\mapsto Ke^{2x}-\frac{4}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x,\ \text{avec } K\in\mathbb{R}.$$

Exercice 2 - Varions la constante... - *L1/Math Sup* - $\star$

1. On commence par résoudre l'équation homogène $y'+y=0$ dont la solution générale est $y(x)=\lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x)=\lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :

   $$\lambda'(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x}\implies\lambda'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

   Une solution particulière est donc donné par $y(x)=\ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

   $$x\mapsto\ln(1+e^x)e^{-x}+\lambda e^{-x}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y'+y=0$, dont la solution générale est donnée par $y(x)=\frac{\lambda}{1+x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x)=\frac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient

   $$\lambda'(x)=1+\ln(1+x).$$

   Une primitive est donnée par $\lambda(x)=(1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

   $$x\mapsto\frac{\lambda}{1+x}+\ln(1+x).$$

3. On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'-\frac{y}{x}=0$. On remarque que $x\mapsto x$ est une solution. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc les fonctions $x\mapsto Cx$, $C\in\mathbb{R}$.
   On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x)=\lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x)=x$, ce qui donne $\lambda(x)=\frac{x^2}{2}+C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions

   $$x\mapsto Cx+\frac{x^3}{2}.$$

4. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. On a
$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C,$$
et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve
$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$
Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc donnée par
$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$
Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.
5. On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :
$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$
Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions
$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Exercice 3 - Avec une condition initiale - *L1/Math Sup* - $\star$

1. La solution générale de l'équation homogène est donnée par $t \mapsto \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}$, une solution particulière, que l'on trouve facilement par la méthode de variation de la constante, est la fonction $t \mapsto \cos^2 t$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions vérifiant $t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t$. On cherche la solution valant 1 en 0. On trouve $\lambda - 2 = 1$, soit $\lambda = 3$. Ainsi, la solution recherchée est la fonction
$$t \mapsto -2\cos^2 t + 3\cos t.$$
2. La résolution de l'équation homogène amène à chercher une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{-x}{x+1}$. Pour cela, il suffit d'écrire
$$\frac{-x}{x+1} = \frac{-x-1+1}{x+1} = -1 + \frac{1}{x+1}.$$
Les solutions de l'équation homogène, sur l'intervalle $]-1,+\infty[$, sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda(x+1)e^{-x}$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme d'un polynôme. Or, si P est un polynôme, le degré de $(x+1)y' + xy$ vaut le degré de P plus 1. On cherche donc y sous la forme d'un polynôme de degré 1, soit $y(x) = ax+b$. Introduisant cela dans l'équation différentielle, on trouve
$$(x+1)a + x(ax+b) = x^2 - x + 1.$$
Par identification, on trouve $a = 1$, $a + b = -1$, soit $b = -2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $x \mapsto (x-2) + \lambda(x+1)e^{-x}$. La solution vérifiant $y(1) = 1$ est obtenue pour $\lambda = e$.

Exercice 4 - Recollement des solutions- tous les cas possibles - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Les trois équations ont en commun que le terme devant y' s'annule. Il faut donc résoudre l'équation sur des intervalles où cette fonction ne s'annule pas (par exemple, $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ pour la première équation), puis étudier si les solutions se recollent correctement (ie si en "collant" une solution sur $]0,+\infty[$ et une solution sur $]-\infty,0[$ on peut obtenir une solution C^1 sur $\mathbb{R}$).

1. $ty'-2y=t^3$: sur $]0,+\infty[$, on résoud d'abord l'équation sans second membre

$$ty'-2y=0 \iff \frac{y'}{y}=\frac{2}{t}$$

et donc les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions de la forme $y(t)=\lambda t^2$. Pour trouver les solutions de l'équation avec second membre, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, ou remarquer plus facilement que $t\mapsto t^3$ est solution. Une fonction y est donc solution de l'équation sur $]0,+\infty[$ si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $y(t)=\lambda t^2+t^3$. De même, une fonction y est donc solution de l'équation sur $]-\infty,0[$ si et seulement s'il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $y(t)=\mu t^2+t^3$.
Essayons maintenant de résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$. Si $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, alors il existe deux constantes λ et μ telles que

$$y(t)=\begin{cases}\lambda t^2+t^3 & \text{si } t>0\\ \mu t^2+t^3 & \text{si } t<0\end{cases}$$

On veut que y soit continue en 0. Mais on remarque que

$$\lim_{t\to 0-}y(t)=\lim_{t\to 0^+}y(t)=0.$$

y ainsi définie et prolongée par $y(0)=0$ est bien continue en 0. De même, il faut que y soit dérivable en 0. Mais, y est dérivable à droite en 0, et $y'_d(0)=0$ (c'est la dérivée de $t\mapsto\lambda t^2+t^3$ en 0), et y est dérivable à gauche en 0 avec $y'_g(0)=0$. Ainsi, la formule précédente définit bien une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, y est solution de l'équation. On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 2.

2. $t^2y'-y=0$: On résoud d'abord l'équation sur $]0,+\infty[$. Elle est équivalente à $y'/y=\frac{1}{t^2}$, ce qui nous dit qu'une fonction y est solution sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $y(t)=\lambda e^{-1/t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. De même, une fonction y est solution sur $]-\infty,0[$ si et seulement si $y(t)=\mu e^{-1/t}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$. Si on cherche maintenant une solution y sur $\mathbb{R}$, ses restrictions à $]0,+\infty[$ et à $]-\infty,0[$ sont aussi solutions, et il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que

$$y(t)=\begin{cases}\lambda e^{-1/t} & \text{si } t>0\\ \mu e^{-1/t} & \text{si } t<0\end{cases}$$

On étudie la continuité éventuelle de y en 0. On a

$$\lim_{t\to 0^+}y(t)=\lim_{t\to 0^+}\lambda e^{-1/t}=0,$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0^-}y(t)=\lim_{t\to 0^-}\mu e^{-1/t}=\begin{cases}+\infty & \text{si } \mu>0\\ -\infty & \text{si } \mu<0\\ 0 & \text{si } \mu=0.\end{cases}$$

Pour assurer la continuité de y en 0, il est donc nécessaire que $\mu = 0$ et on prolonge y par continuité en 0 en posant $y(0) = 0$. Mais alors, pour $t > 0$, on a

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}e^{-1/t}$$

et par comparaison des fonctions puissance et exponentielle, on a

$$\lim_{t\to 0^+} y'(t) = 0.$$

Puisque bien sûr $\lim_{t\to 0^-} y'(t) = 0$ (rappelons que $\mu = 0$), y est dérivable en 0. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont donc les fonctions

$$y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

On pourra remarquer que l'ensemble des solutions, dans ce cas, est de dimension 1.

3. $(1-t)y' - y = t$: on résoud cette fois l'équation sur chacun des intervalles $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$. Les solutions de l'équation homogène associée, sur $]1, +\infty[$, sont les fonctions de la forme
$$t \mapsto \frac{\lambda}{1-t},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$
On résoud ensuite l'équation générale par la méthode de variation de la constante. En posant $y(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t}$, on trouve
$$\lambda'(t) = t$$
et donc une solution particulière est donnée par $y(t) = \frac{t^2}{2(1-t)}$. On a donc prouvé qu'une fonction y est solution sur $]1, +\infty[$ de l'équation si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $y(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)}$. On résoud de même l'équation sur $]-\infty, 1[$.
Considérons maintenant y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Alors il existe deux constantes λ et μ telles que
$$y(t) = \begin{cases} \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t > 1 \\ \frac{\mu + t^2}{2(1-t)} & \text{si } t < 1. \end{cases}$$
Pour que y soit continue en 1, puisque $1 - t \to 0$ lorsque t tend vers 1, il est nécessaire que $\lambda + t^2 \to 0$ lorsque $t \to 1$, soit $\lambda = -1$. De même, on doit avoir $\mu = -1$. Ainsi, si y est solution sur $\mathbb{R}$, pour $t \neq 1$, elle s'écrit
$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2(1-t)} = -\frac{1}{2}(1+t).$$
Cette fonction se prolonge par continuité en 1, et on vérifie aisément qu'elle est solution de l'équation. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 0.

Exercice 5 - D'autres recollements... - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. Sur $]1,+\infty[$, la fonction $x\mapsto x\ln x$ ne s'annule pas et donc on a bien affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur cet intervalle. L'ensemble de ces solutions est donc une droite affine. On commence par résoudre l'équation sans second membre,

$$(x\ln x)y'-y=0 \iff \frac{y'}{y}=\frac{1}{x\ln x}.$$

Puisqu'une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x\ln x}$ est $\ln(\ln(x))$, on intègre et on trouve $\ln|y|=\ln(\ln(x))+K$, soit $y(x)=C\ln(x)$. On cherche maintenant une solution particulière en utilisant la méthode de variation de la constante : on cherche donc une solution sous la forme

$$f(x)=C(x)\ln(x).$$

En dérivant,

$$f'(x)=C'(x)\ln(x)+\frac{C(x)}{x}.$$

On introduit alors dans l'équation pour obtenir :

$$(x\ln(x))\ln(x)C'(x)=-(1+\ln(x))/x$$

soit

$$C'(x)=-\frac{1+\ln(x)}{x^2(\ln(x))^2}.$$

Ceci est de la forme $-u'/u^2$, avec $u(x)=x\ln(x)$. On peut donc intégrer pour trouver qu'une solution particulière est donnée par $C(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$, soit $f(x)=\frac{1}{x}$. Finalement, on trouve que les fonctions solutions de l'équation différentielle sur $]1,+\infty[$ sont les fonctions

$$x\mapsto\frac{1}{x}+C\ln(x),\ C\in\mathbb{R}.$$

Etudions maintenant cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$. Le problème est que $x\mapsto x\ln x$ s'annule en 1 et que l'on sort du cadre des théorèmes usuels. On ne sait donc même pas s'il existe des solutions sur cet intervalle et, s'il en existe, quelle sera la dimension de l'espace des solutions.

En revanche, on sait résoudre l'équation sur $]1,+\infty[$ et aussi sur $]0,1[$ (exactement de la même façon). Si f est donc une solution sur $]0,+\infty[$, il existe donc deux constantes C et D telle que

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}+C\ln x & \text{si } x>1\\ \frac{1}{x}+D\ln x & \text{si } x\in]0,1[.\end{cases}$$

Il faut remarquer que les constantes C et D peuvent être distinctes, puisqu'on a simplement écrit que f est d'une part solution sur $]1,+\infty[$, d'autre part solution sur $]0,1[$. Tout le travail maintenant consiste à savoir s'il y a recollement de ces solutions, c'est-à-dire si on peut choisir C et D de sorte que la formule précédente définisse une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$. D'une part, puisque $\ln(1)=0$, on remarque que

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=1.$$

La fonction est donc continue en 1, quelles que soient les valeurs de C et D. On dérive, et on sait que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{C}{x}$ si $x>1$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{D}{x}$ sinon. On a donc

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-1+C \text{ tandis que } \lim_{x\to 1^-} f'(x)=-1+D.$$

Les limites à droite et à gauche de f' coincident si et seulement si $C=D$. Autrement dit, f' est dérivable en 1 si et seulement si $C=D$. Ainsi, les solutions de l'équation sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions qui s'écrivent

$$x\mapsto \frac{1}{x}+C\ln(x),\ C\in\mathbb{R}.$$

2. On va résoudre l'équation différentielle sur $I_1=]0,+\infty[$ et sur $I_2=]-\infty,0[$, intervalles où la fonction devant y' ne s'annule pas. On fixe donc j dans $\{1,2\}$. On résoud sur I_j l'équation sans second membre, $xy'+2y=0$. Les solutions qui ne s'annulent pas vérifient $y'/y=-2/x$, soit $\ln|y(x)/C|=\ln|1/x^2|$ avec k une constante. Les fonctions $x\mapsto 1/x^2$ sont donc solutions, et puisqu'on sait que l'ensemble des solutions est de dimension 1, on trouve que l'ensemble des solutions sur I_j de l'équation $xy'+2y=0$ sont les fonctions $x\mapsto C_j/x^2$.
   On résoud maintenant l'équation avec second membre en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x)=\lambda(x)/x^2$. y est solution de l'équation différentielle si et seulement si
   $$\lambda'(x)=\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}.$$
   En intégrant, une solution particulière est donnée par
   $$\lambda(x)=\frac{x-\arctan x}{x^2}.$$
   Les solutions sur I_j de l'équation différentielle sont donc les fonctions
   $$x\mapsto\frac{x-\arctan x+C_j}{x^2}.$$
   Soit maintenant z une solution sur $\mathbb{R}$. Alors $z_{|I_j}$ est solution de l'équation différentielle sur I_j. Ainsi, il existe des constantes C_1 et C_2 telle que z vérifie sur I_j
   $$z(x)=\frac{x-\arctan x+C_j}{x^2}.$$
   Il faut que z soit continue en 0. Pour que la fonction admette une limite finie en 0, il est nécessaire que $C_j=0$. Réciproquement, si $z(x)=\frac{x-\arctan x}{x^2}$ pour $z\neq 0$, alors on effectue un dl et on trouve
   $$z(x)=\frac{x}{3}+o(x).$$
   Il suit que z, prolongée par $z(0)=0$, est dérivable en 0 avec $z'(0)=1/3$. z est donc l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
3. On commence par résoudre l'équation différentielle sur un intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, avec $k\in\mathbb{Z}$, intervalle sur lequel la fonction tan est bien définie. La solution générale de

l'équation homogène est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\tan x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La recherche d'une solution particulière par la méthode de variation de la constante amène à

$$\lambda'(x)\cos^2(x)e^{\tan x} = e^{\tan x}$$

ce qui donne comme solution particulière $x \mapsto e^{\tan x}(\tan x + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Lorsque x tend vers $\pi/2 + k\pi$ (par valeurs inférieures), cette fonction tend vers $+\infty$: il n'y a donc pas de recollement possible.

Exercice 6 - Un double recollement, mais détaillé... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On procède par identification, en mettant tout au même dénominateur, et on trouve $a = 1$ et $b = 2$.
2. On se place sur l'un des trois intervalles

$$I_1 =]-\infty, 0[,\ I_2 =]0,1[,\ \ I_3 =]1, +\infty[,$$

intervalles où la fonction apparaissant devant y' ne s'annule pas. Sur chacun de ces intervalles, on peut diviser par $x(x-1)$. La résolution de l'équation sans second membre amène à intégrer la fonction $x \mapsto \frac{3x-1}{x(x-1)}$. Écrivant

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1},$$

on trouve que la solution générale de l'équation homogène est $x \mapsto \lambda x(x-1)^2$.
3. On procède à nouveau par identification : on pose $y(x) = ax^2 + bx + c$, on introduit cette fonction dans l'équation, et on cherche une valeur pour a, b et c de sorte que y vérifie (E). Après calcul, on trouve que $y(x) = x^2$ convient.
4. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) sur I_1, sur I_2 et sur I_3. Ainsi, il existe trois constantes λ_1, λ_2 et λ_3 telles que

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + \lambda_2 x(x-1)^2 & \text{si } x \in]0,1[\\ x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On va maintenant déterminer λ_1, λ_2 et λ_3 pour que les solutions se recollent effectivement. D'abord en 1, on voit que, quelque soient les valeurs de λ_1 et λ_2, alors $y(x)$ tend vers 0 en 0 (à gauche et à droite). Ainsi, y est toujours continue en 0. Passons à la dérivée. On a

$$\frac{y(x)}{x} = x + \lambda_1(x-1)^2 \to \lambda_1 \text{ si } x \to 0^-,$$

alors que

$$\frac{y(x)}{x} = x + \lambda_2(x-1)^2 \to \lambda_2 \text{ si } x \to 0^+.$$

Pour que y soit dérivable en 0, il est donc nécessaire et suffisant que $\lambda_1 = \lambda_2$. Passons maintenant au problème en 1. Comme précédemment, il n'y a aucun souci pour la continuité, et $y(1) = 1$. Pour la dérivabilité, on a

$$\frac{y(x)-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \lambda_2\frac{x(x-1)^2}{x-1} \to 2 \text{ si } x \to 1^-,$$

alors que

$$\frac{y(x)-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}+\lambda_3\frac{x(x-1)^2}{x-1}\to 2 \text{ si } x\to 1^+.$$

Ainsi, pour toutes valeurs de λ_2 et λ_3, on a un récollement dérivable en 1.

Exercice 7 - Presque linéaire...ou presque du premier ordre - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Si on pose $z=y'$, alors on a une simple équation différentielle d'ordre 1 en y :

$$(1+x)^2z'+(1+x)z-2=0.$$

   On résoud d'abord l'équation sans second membre $(1+x)^2z'+(1+x)z=0$, dont la solution générale est donnée par $z(x)=\frac{\lambda}{1+x}$. On cherche ensuite une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $z(x)=\frac{\lambda(x)}{1+x}$. Il vient

$$\lambda'(x)(1+x)=2,$$

   et une solution particulière est donnée par $z(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}$ (rappelons que l'on travaille sur $]-1,+\infty[$). La solution générale de l'équation vérifiée par z est donc

$$x\mapsto\frac{\lambda}{1+x}+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}.$$

   Finalement, en intégrant, on trouve que la solution générale de l'équation initiale vérifiée par y est donnée par

$$x\mapsto\big(\ln(1+x)\big)^2+\lambda\ln(1+x)+\mu,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

2. Posons $z=y^2$. Alors $z'=2yy'$, et donc z vérifie l'équation différentielle

$$xz'-z=x^2.$$

   On résoud cette équation en déployant la machinerie usuelle : l'équation sans second membre est $xz'-z=0$, donc la solution générale est $z(x)=\lambda x$. On cherche une solution particulière sous la forme $z(x)=\lambda(x)x$, qui donne $\lambda'(x)=1$. Ainsi, la solution générale de l'équation vérifiée par z est $x\mapsto\lambda x+x^2$. Les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions $x\mapsto\sqrt{\lambda x+x^2}$ et $x\mapsto-\sqrt{\lambda x+x^2}$, là où elles sont définies (en particulier, son on cherche une solution sur $]0,+\infty[$, il est impératif que $\lambda x+x^2$ soit positif pour tout $x\geq 0$, donc que λ soit positif).

Exercice 8 - Le plus facile des systèmes différentiels - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

D'abord, l'équation $z''=0$ donne facilement $z(t)=at+b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u'=x''+iy''=\omega y'-i\omega x'=-i\omega u.$$

On en déduit que $u(t)=(c+id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{aligned}x'(t)&=c\cos(\omega t)+d\sin(\omega t)\\ y'(t)&=d\cos(\omega t)-c\sin(\omega t).\end{aligned}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{aligned} x'(t) &= c'\sin(\omega t) - d'\cos(\omega t) \\ y'(t) &= d'\sin(\omega t) + c'\cos(\omega t) \end{aligned}$$

où on a posé $c' = c/\omega$ et $d' = d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Exercice 9 - Plus difficile... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soit y une solution de l'équation. On cherche donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant l'équation. Soit J un intervalle sur lequel $y - x$ est de signe constant. Sur cet intervalle J, y vérifie une des deux équations différentielles suivantes :

$$y' = y - x \text{ ou } y' = -y + x.$$

On va commencer par résoudre $y' = y - x$. L'équation homogène est $y' - y = 0$, dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^x$. Une solution particulière est obtenue sous la forme d'un polynôme de degré 1. On trouve que $x + 1$ est solution. Les solutions de $y' = y - x$ sont donc les fonctions $y(x) = x + 1 + \lambda e^x$.
Une étude similaire permet de résoudre $y' = -y + x$. On trouve que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y(x) = x - 1 + \mu e^{-x}$.
Revenons maintenant à l'équation initiale. Les solutions de $y' = y - x$ vérifient $y(x) \geq x$

- sur $\mathbb{R}$ si $\lambda > 0$;
- sur $]-\infty, -\ln(-\lambda)[$ si $\lambda < 0$.

Les solutions de $y' = -y + x$ vérifient $y(x) \leq x$

- sur $\mathbb{R}$ si $\mu < 0$;
- sur $]-\ln(\mu), +\infty[$ si $\mu > 0$.

D'autre part, pour $\lambda = -\mu < 0$, les fonctions $y_1(x) = (x+1) + \lambda e^x$ et $y_2(x) = (x-1) - \lambda e^{-x}$ se recollent bien en $\ln(-\lambda)$. En effet, elles vérifient $y_1(\ln(-\lambda)) = y_2(\ln(-\lambda)) = 0$ et

$$y_1'(\ln(-\lambda)) = 1 + \lambda(\ln(-\lambda))$$

$$y_2'(\ln(-\lambda)) = 1 - \lambda(-\ln(-\lambda))$$

et donc $y_1'(\ln(-\lambda)) = y_2'(\ln(-\lambda))$. On obtient donc trois familles de solutions sur $\mathbb{R}$:

1. les fonctions $y(x) = x + 1 + \lambda e^x$ pour $\lambda > 0$;
2. les fonctions $y(x) = x - 1 + \mu e^{-x}$ pour $\mu < 0$;
3. les fonctions $y(x) = (x+1) + \lambda e^x$ sur $]-\infty, -\ln(-\lambda)]$ et $y(x) = x - 1 - \lambda e^{-x}$ sur $[-\ln(-\lambda), +\infty[$.

Applications

Exercice 10 - Triplement d'une population - *L1/Math Sup* - ⋆

L'accroissement de la population est mesurée par $P'(t)$, qui est donc proportionnelle à $P(t)$. Autrement dit, P vérifie une équation différentielle du type $P'(t) = kP(t)$. Sa solution est de la forme $P(t) = Ce^{kt}$. De l'autre information (la population double tous les 50 ans), on déduit que $P(t + 50) = 2P(t)$ pour tout t. Ainsi, on a

$$Ce^{kt}e^{50k} = 2Ce^{kt} \implies 50k = \ln 2 \implies k = \ln 2/50.$$

On cherche x tel que $P(t+x)=3P(t)$ pour tout P. Ceci donne

$$Ce^{kt}e^{kx}=3Ce^{kt} \implies kx=\ln 3 \implies x=\frac{50\ln 3}{\ln 2}\simeq 79,24.$$

La population triple environ tous les 79 ans un quart.

Exercice 11 - Recherche de courbes - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit $M(x,f(x))$ un point de la courbe. La tangente en M a pour équation $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$. L'abscisse de T est donc $x-f(x)/f'(x)$. Pour que O soit le milieu de $[PT]$, il est nécessaire et suffisant que $0=x-f(x)/f'(x)+x$. f est donc solution de l'équation différentielle

$$2xf'(x)=f(x).$$

On résoud cette équation différentielle, et on trouve que ses solutions sont les fonctions $f(x)=C\sqrt{x}$.

Exercice 12 - Où est l'équation différentielle ? - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

On pose $g=f+f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f+f'=g$. On résoud cette équation. L'équation homogène est $f'+f=0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résoud l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x)=\lambda(x)e^{-x}$, on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x}=g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x)=e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f+f'=g$ s'écrit

$$f(x)=\lambda e^{-x}+e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Soit $\varepsilon>0$. Il existe $A>0$ tel que, pour $t>A$, on a $|g(t)|\leq\varepsilon$. Soit $M=\int_0^A |g(t)e^{-t}|dt$ et soit $B\geq A$ tel que, pour $x\geq B$, on a $e^{-x}M\leq\varepsilon$. Alors, pour tout $x\geq b$, il vient

$$\begin{aligned}\left|e^{-x}\int_0^x g(t)e^{-t}dt\right| &\leq e^{-x}\int_0^A |g(t)e^{-t}|dt+e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^{-t}dt\\ &\leq e^{-x}M+e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^{-t}dt\\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\lim_{+\infty} f=0$.

Exercice 13 - Une équation intégrale - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Posons $y(x)=\int_0^x f(t)dt$, qui est dérivable sur $[0,+\infty[$. Alors, dérivant l'équation, on a

$$\frac{1}{2}f^2(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2+\frac{2}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)f(x)$$

soit

$$\frac{1}{2}y'^2 = -\frac{1}{x}^2 y^2 + \frac{2}{x}yy'.$$

Remarquons que si $y(x_0) = 0$, alors $\int_0^{x_0} f^2(t)dt = 0$, et donc $f = 0$ sur $[0, x_0]$ puisque l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement s'il s'agit de la fonction nulle. En particulier, y est aussi identiquement nulle sur $[0, x_0]$.
Posons $a = \sup\{x > 0; y(x) = 0\}$ avec $a = 0$ si l'ensemble est vide. Alors y est non-nulle sur $]a, +\infty[= I$, et sur cet intervalle l'équation peut encore s'écrire

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \frac{4}{x}\frac{y'}{y} + \frac{2}{x^2} = 0.$$

On résoud cette équation du second degré, et on trouve

$$\frac{y'}{y} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{x}$$

soit

$$y(x) = \lambda x^{2\pm\sqrt{2}}.$$

Revenant à $f = y'$, on trouve sur I que

$$f(x) = \lambda x^{1\pm\sqrt{2}}.$$

Maintenant, f doit être continu en a, et on sait que $f(a) = 0$. Ceci n'est possible que si $a = 0$ et si $f(x) = \lambda x^{1+\sqrt{2}}$. Ces fonctions sont donc les solutions de l'équation intégrale.

Exercice 14 - Calcul d'une transformée de Fourier par résolution d'une équation différentielle - *L3/Math Spé* - ⋆⋆

On remarque d'abord que f est bien définie pour tout x. En effet, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}\right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}.$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$, car en 0 elle est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable (intégrale de Riemann), et, au voisinage de $+\infty$, elle vérifie

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Prouvons également que f est de classe C^1. Pour cela, on remarque que la fonction

$$g : (x,t) \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x égale à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sqrt{t}e^{-t}$$

et la fonction apparaissant à droite dans l'inégalité précédente est intégrable sur $]0,+\infty[$ (elle est continue en 0, et au voisinage de $+\infty$, elle est négligeable devant $1/t^2$). On en déduit par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres que f est dérivable, avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t}e^{itx}.$$

On exprime le membre de droite de cette égalité en fonction de f grâce à une intégration par parties, en posant $v(t) = \sqrt{t}$ et $u(t) = \frac{1}{ix-1}e^{(ix-1)t}$. Puisque $u(0)v(0) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, on en déduit

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-i}{2(ix-1)}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{itx}dt \\
&= \frac{-i(-ix-1)}{2(x^2+1)}f(x) \\
&= \frac{x+i}{2(x^2+1)}f(x).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle. On l'écrit sous la forme

$$\frac{f'}{f} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{i}{2(x^2+1)}$$

ce qui donne

$$\ln|f| = \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{i}{2}\arctan(x) + K.$$

On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = C(x^2+1)^{1/4}\exp\left(\frac{i}{2}\arctan x\right).$$

On détermine la valeur de la constante C en calculant $f(0) = C$. On a par ailleurs

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

en effectuant le changement de variables $t = u^2$. Utilisant le rappel, on trouve que $C = \sqrt{\pi}$.