Exercice 1 - Transformée d'une distribution homogène - *Quatrième année* - ⋆

Comme souvent pour les transformées de Fourier de distribution, tout se ramène aux transformées de Fourier de fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a en effet

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi_t)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(ty)e^{-2\pi iy.x}dy \\
&= t^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \phi(u)e^{-2\pi iu.(x/t)}du \\
&= t^{-n}\mathcal{F}(\varphi)(x/t)
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\langle \hat{T}, \varphi_t\rangle &= \langle T, \mathcal{F}\varphi_t\rangle \\
&= t^{-n}\langle T, (\mathcal{F}\varphi)_{1/t}\rangle \\
&= t^{-n}t^{n+\lambda}\langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle \\
&= t^{\lambda}\langle \hat{T}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\lambda = -(n+\mu)$ avec $\mu = -n-\lambda$ pour conclure que $\hat{T}$ est homogène de degré $-n-\lambda$.

Exercice 2 - Valeur principale - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Prouvons d'abord la formule donnée :

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\le |x|\le 1} \frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{|x|\ge 1}\frac{\phi(x)}{x}dx.$$

   Dans la première intégrale, on retranche $\phi(0)$ (ce qui est possible car son intégrale sur $[-1,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,1]$ est nulle. Mais alors, la fonction $(\phi(x)-\phi(0))/x$ est intégrable au voisinage de 0 (elle se prolonge par continuité). D'où la formule, qui fait apparaître $\mathrm{vp}(1/x)$ comme somme de deux distributions. La deuxième donne clairement une distribution tempérée (car elle est associée à une fonction intégrable à croissance modérée). Pour la première, il suffit de remarquer que

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx\right| \le 2\sup_{u\in[-1,1]}|\phi(u)| \le 2\|\phi\|_1.$$

   Ceci garantit là encore qu'il s'agit d'une distribution tempérée. On va donc pouvoir calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(1/x)$.

2. La formule énoncée s'obtient facilement en réalisant un changement de variables $u = -x$ dans l'intégrale, et en remarquant que la fonction qui apparaît sous l'intégrale est désormais intégrable en 0. On a alors, pour $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{vp}(1/x), \hat{\phi}\rangle &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\left(\frac{e^{-i2\pi xt}-e^{i2\pi xt}}{2x}\right)dtdx \\
&= -i\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\frac{\sin(2\pi xt)}{t}dtdx.
\end{aligned}$$

Remarquons que la fonction $(t,x)\mapsto \phi(t)\frac{\sin(2\pi xt)}{x}$ est intégrable sur $[-R,R]\times\mathbb{R}$, et que l'on peut donc intervertir l'ordre d'intégration. De plus, si $g_R(t)=\int_{-R}^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x}dx\phi(t)$, alors

$$|g_R(t)|\leq M|\phi(t)|,$$

où la constante M vient du fait que $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x}dx$ existe. Le théorème de convergence dominée nous permer de rentrer la limite dans la première intégrale, ce qui donne :

$$\langle \mathrm{vp}(1/x),\hat{\phi}\rangle=-i\int_{\mathbb{R}}\phi(t)\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^R\frac{\sin(2\pi xt)}{x}dxdt$$

Faisant le changement de variables $u=2\pi tx$ dans l'intégrale, et sachant que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y}=\frac{\pi}{2}$, on a trouvé que

$$\langle \mathrm{vp}(1/x),\hat{\phi}\rangle=-i\pi\int_0^{+\infty}\phi(t)dt+i\pi\int_{-\infty}^0\phi(t)dt.$$

La transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(1/x)$ est donc la fonction

$$x\mapsto -i\pi\mathrm{signe}(x).$$

3. Il suffit de remarquer que $H(x)=\frac{1+\mathrm{signe}(x)}{2}$. Posons alors $T=\frac{1}{2\pi}\left(\pi\delta+i\mathrm{vp}(1/x)\right)$. La transformée de Fourier de T est exactement H.

Exercice 3 - Distributions harmoniques - *Quatrième année* - ⋆

1. Prenons la transformée de Fourier de l'expression précédente, on obtient

$$(x^2+y^2)\hat{T}=0.$$

   Si ϕ est une fonction test à support dans $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, alors on a

$$\langle\hat{T},\phi\rangle=\langle(x^2+y^2)\hat{T},\phi/(x^2+y^2)\rangle=0,$$

   ce qui prouve l'assertion sur le support.
2. Si u est une fonction à croissance modérée harmonique, la distribution associée T_u est-elle aussi harmonique, et elle est tempérée. On en déduit que le support de $\hat{T_u}$ est $\{0\}$. Ceci entraîne que $\hat{T_u}=\sum_{k=0}^N a_k\delta_0^{(k)}$. Prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient que T_u est la distribution associée à un polynôme, ce qui prouve que u est un polynôme (l'égalité de deux distributions associées à des fonctions entraîne l'égalité presque-partout de ces fonctions, et donc l'égalité partout quand il s'agit de fonctions continues).
3. Si u est une fonction entière bornée, alors elle est harmonique et à croissance modérée, donc elle est polynômiale. Mais les seules polynômes bornées sont les constantes. On retrouve bien le théorème de Liouville.

Exercice 4 - Transformée de Fourier de la fonction d'Heaviside - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Visiblement, le problème est en 0, on va donc découper entre ce qui se passe en 0 et ce qui se passe un peu plus loin. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}dx.$$

Dans la dernière intégrale, on peut appliquer sans problème le théorème de convergence dominée pour $\varepsilon \to 0$. La première se réécrit ainsi :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)}{x+i\alpha\varepsilon}dx = \int_{-1}^{1} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x+i\alpha\varepsilon}dx + \phi(0)\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+i\alpha\varepsilon}.$$

Là encore, on a enlevé le problème qu'il y avait dans la première intégrale, et il est possible de faire tendre ε vers 0. Pour la deuxième intégrale, il suffit d'effectuer le calcul

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+i\alpha\varepsilon}dx &= \int_{-1}^{1} \frac{x-i\alpha\varepsilon}{x^2+\alpha^2\varepsilon^2}dx \\ &= -i\alpha\varepsilon\left[\frac{1}{\alpha\varepsilon}\arctan(x/\alpha\varepsilon)\right]_{-1}^{1} \\ &= -i\pi.\end{aligned}$$

Mettant cela bout à bout, on obtient que la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution demandée est

$$-i\pi\delta_0 + \mathrm{vp}(1/x).$$

2. La fonction est intégrable, il suffit de calculer sa transformée de Fourier comme fonction de L^1. On a

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{-2\pi i\xi t}dt \\ &= \left[\frac{1}{-\lambda-2\pi i\xi}e^{-\lambda t-2\pi i\xi t}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda+2\pi i\xi}\end{aligned}$$

3. Si on fait tendre λ vers 0, le théorème de convergence dominée assure que dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la distribution $H(x)e^{-\lambda x}$ converge vers H. La transformation de Fourier étant continue, il suffit de déterminer la limite de $\frac{1}{\lambda+2\pi ix}$ (au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$). Mais on réécrit cela en

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{1}{x-i\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Lorsque λ tend vers 0, ceci converge vers

$$\frac{1}{2i\pi}\left(i\pi\delta_0 + \mathrm{vp}(1/x)\right).$$

La transformée de Fourier de H est donc

$$\frac{1}{2}\delta_0 - \frac{i}{2\pi}\mathrm{vp}(1/x).$$

4. On réapplique la transformée de Fourier à la formule précédente. Il vient
$$2i\pi(H-\frac{1}{2})=\mathcal{F}(\mathrm{vp}).$$

Exercice 5 - Peigne de Dirac - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Posons, pour $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(x)=\phi(x+1)$. Il vient, les sommes étant finies
$$\langle P,\psi\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi(j)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi(j+1)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi(j).$$
2. Remarquons d'abord que E est une distribution, car c'est une fonction bornée sur les intervalles compacts donc dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. D'autre part, il est facile de voir que E est à croissance lente, car on a par exemple
$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|E(x)|}{(1+|x|)^3}dx<+\infty.$$
Ainsi, E est une distribution tempérée. D'autre part, $F_j(x)=j(H_j(x)-H_{j+1}(x))$ où $H_j(x)=1_{]j,+\infty]}$ est une translatée de la fonction de Heaviside. Il vient $F_j'=j(\delta_j-\delta_{j+1})$. Prenons maintenant $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et soit n tel que $\mathrm{supp}(\phi)\subset[-n,n]$. On a
$$\langle E',\phi\rangle=-\langle E,\phi'\rangle=-\langle\sum_{j=-n}^{n}F_j,\phi'\rangle=\sum_{j=-n}^{n}\langle F_j',\phi\rangle=\sum_{j=-n}^{n}j(\phi(j)-\phi(j+1)).$$
La série est "télescopique", et utilisant le fait qu'en n et $-n$, ϕ s'annule, on obtient
$$\langle E',\phi\rangle=\langle\sum_{j\in\mathbb{Z}}\delta_j,\phi\rangle=\langle P,\phi\rangle.$$
On obtient donc que $E'=P$, et puisque E est tempérée, P l'est aussi.
3. On a
$$\langle\hat{P},\phi\rangle=\langle P,\hat{\phi}\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(j).$$
De même,
$$\langle\hat{P},\tau_1\phi\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\tau_1\phi}(j).$$
Remarquons maintenant que
$$\widehat{\tau_1\phi}(j)=\int_{\mathbb{R}}e^{-2i\pi jx}\phi(x+1)dx=\int_{\mathbb{R}}e^{-i2\pi j(x-1)}\phi(x)dx=\hat{\phi}(j)$$
puisque $e^{-2i\pi j}=1$. Ceci donne le résultat.
4. Soit $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. On a
$$\langle u\hat{P},\phi\rangle=\langle P,\widehat{u\phi}\rangle=\langle P,\tau_1\hat{\phi}\rangle=\langle P,\hat{\phi}\rangle=\langle\hat{P},\phi\rangle.$$
5.

6. Prenons ϕ à support dans $]j-1,j+1[$. L'idée est de "factoriser" $\phi(x)$ par $u(x)-1$. Pour cela, il suffit de remarquer que
$$\psi(x)=\frac{\phi(x)-\phi(0)}{u(x)-1}$$
est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (en effet, $u(x)-1=xv(x)$ où v est C^∞ et ne s'annule pas en 0). Pour la rendre à support compact, on va multiplier par une fonction plateau en considérant η à support dans $]-3/4,3/4[$, et en remarquant que l'on a
$$\phi(x)=\eta(x)(u(x)-1)\psi(x)+\eta(x)\phi(0).$$
Puisque $(u-1)T=0$, on obtient
$$\langle T,\phi\rangle=\langle (u-1)T,\eta\psi\rangle+\langle T,\eta\rangle\phi(0)=a_0\phi(0)$$
en posant $a_0=\langle\delta_0,\phi\rangle$. Pour passer au résultat global, le plus commode est d'utiliser une partition de l'unité (η_k) associée au recouvrement ouvent $]k-3/4,k+3/4[$. En posant $\phi_k=\eta_k\phi$, on a $\phi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi_k$, et $\phi(k)=\phi_k(k)$. Maintenant, en appliquant le raisonnement précédent à ϕ_k, on sait qu'il existe une constante a_k telle que $\langle T,\phi_k\rangle=a_k\phi_k(k)=a_k\phi(k)$. Ceci prouve le résultat !
7. $\hat{P}$ vérifie l'équation $(u-1)\hat{P}=0$ d'où l'existence des a_j. Prenons maintenant ϕ dans $\mathcal{D}(]j-1,j+1[)$. Il vient
$$\langle\hat{P},\phi\rangle=a_j\phi(j)=\langle\hat{P},\tau_1\phi\rangle=a_{j-1}\phi(j)$$
puisque $\tau_1\phi$ est à support dans $]j-2,j[$. On a donc pour tout $j\in\mathbb{Z}$ $a_j=a_{j-1}$, et donc $a_j=a_0=a$.
8. Pour cette fonction, $\phi=\hat{\phi}$, et donc
$$\langle\hat{P},\phi\rangle=a\sum_{j\in\mathbb{Z}}\phi(j)=\langle P,\hat{\phi}\rangle=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(j).$$
Comme $\hat{\phi}=\phi$ et bien sûr $\sum_j\hat{\phi}(j)>0$, on en déduit que $a=1$.
9. Il s'agit simplement d'écrire que $\langle P,\phi\rangle=\langle\hat{P},\phi\rangle$.

Exercice 6 - Deux méthodes... - *Quatrième année* - ⋆⋆

1. Prenons $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme souvent, on écrit
$$\langle e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x),\phi\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{e^{i\lambda x}\phi(x)}{x}dx+\int_{|x|\geq1}\frac{\phi(x)e^{i\lambda x}}{x}dx.$$
La deuxième intégrale ne pose pas de problèmes : il suffit d'appliquer le théorème de Riemann-Lebesgue pour obtenir qu'elle tend vers 0 si λ tend vers $+\infty$. Pour la première, on retire ce qui pose problème :
$$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{e^{i\lambda x}\phi(x)}{x}dx=\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{e^{i\lambda x}\phi(x)-e^{i\lambda x}\phi(0)}{x}dx+\phi(0)\int_{\varepsilon\leq|x|\leq1}\frac{e^{i\lambda x}}{x}dx.$$

La fonction dans la première intégrale est cette fois intégrable en 0. On a donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{e^{i\lambda x}\phi(x)-e^{i\lambda x}\phi(0)}{x}dx=\int_{|x|\leq 1}\frac{e^{i\lambda x}\phi(x)-e^{i\lambda x}\phi(0)}{x}dx,$$

et on peut à nouveau appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue. Pour la seconde, on écrit $e^{i\lambda x}=\cos(\lambda x)+i\sin(\lambda x)$. Or, la fonction $x\mapsto\frac{\cos(\lambda x)}{x}$ est impaire, et son intégrale sur $[-1,-\varepsilon]\cup[-\varepsilon,1]$ est donc nulle. D'autre part, $x\mapsto\frac{\sin(\lambda x)}{x}$ est intégrable en 0, d'où il vient finalement :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\langle e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x),\phi\rangle=\lim_{\lambda\to+\infty}\phi(0)\int_{-1}^{1}\frac{\sin(\lambda x)}{x}dx.$$

On conclut alors en effectuant la changement de variable $u=\lambda x$ et en utilisant le fait que $\int_0^+\infty\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}$. On obtient donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty}e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x)=i\pi\delta_0.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{F}(e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x)),\phi\rangle&=\langle e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x),\hat{\phi}\rangle\\&=\langle\mathrm{vp}(1/x),e^{i\lambda x}\hat{\phi}\rangle.\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise que

$$\widehat{\phi\left(.+\frac{\lambda}{2\pi}\right)}(x)=e^{i\lambda x}\hat{\phi}(x).$$

Utilisant alors le fait que la transformée de Fourier de $\mathrm{vp}(1/x)$ est donnée par $-i\pi\mathrm{signe}(x)$, on obtient

$$\langle\mathcal{F}(e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x)),\phi\rangle=i\pi\int_{-\infty}^{0}\phi(x+\lambda/2\pi)-i\pi\int_0^{+\infty}\phi(x+\lambda/2\pi)dx.$$

On effectue le changement de variables $u=x+\lambda/2\pi$, et on utilise le théorème de convergence dominée pour obtenir que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{F}(e^{i\lambda x}\mathrm{vp}(1/x))=i\pi.$$

Il suffit ensuite de prendre la transformée de Fourier inverse pour retrouver le résultat donné par l'autre méthode !

Exercice 7 - Equation de Cauchy-Riemann - *4ème année* - ⋆⋆⋆

Exercice 8 - Distribution nulle - *Quatrième année* - ⋆⋆⋆

1. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à $u=\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$. On a :

$$u(x,y+h)-u(x)=h\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\int_0^1(1-s)h^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y+sh)dx.$$

On obtient

$$\left|\frac{u(x,y+h)-u(x)}{h}-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|\leq C|h|\sup_{|y'-y|\leq 1}\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,z')\right|.$$

Cette inégalité montre que $\frac{u(x,y+h)-u(x)}{h}-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)$ converge uniformément sur les compacts vers 0, ce qui est le résultat souhaité.

2. On a $\frac{F(y+h)-F(y)}{h}=\left\langle T_x,\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\right\rangle\to\langle T_x,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\rangle$. Par récurrence, on obtient que F est $\mathcal{C}^\infty$ avec $F^{(n)}(y)=\langle T_x,\frac{\partial f}{\partial y}\rangle$.
3. D'après le cours, G s'étend en une fonction entière définie sur $\mathbb{C}$ et on a

$$G(z)=\langle T_x,e^{-ixz}\rangle.$$

Si on admet que ce qui a été fait pour le cas complexe peut aussi se faire pour le cas réel (ce n'est pas difficile, il suffit de remarquer que si $z=u+iv$, $\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}.+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$), alors la question précédente nous montre que $\hat{G}^{(n)}(0)=(-i)^n\langle T_x,x^n\rangle=0$. Ainsi, G est la fonction nulle, donc $\hat{T}=0$ et $T=0$.