

Exercices - Approximation de nombres réels - Calcul de valeurs approchées : corrigé

Exercice 1 - Une réflexion sur l'utilisation de la calculatrice - L2/Math Spé - **

1. On a, pour tout $k \geq 1$, $\frac{|\sin k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. La série est donc absolument convergente.
2. Il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}.$$

3. On veut $1/N \leq 10^{-2} \implies N \geq 100$. Malheureusement, la calculatrice ne peut donner qu'une valeur approchée de S_{100} . Si on a un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près, on a un encadrement de S à $2 \cdot 10^{-2}$ près.
4. On sait que $|S - S_{1000}| \leq 10^{-3}$. Or, la calculatrice fournit $S_{1000} = 1,013\dots$. Ceci signifie que

$$-10^{-3} \leq S_{1000} - 1,013 \leq 10^{-3}.$$

Ainsi, en sommant les deux inégalités, on obtient

$$-10^{-2} \leq -2 \cdot 10^{-3} \leq S - 1,013 \leq 2 \cdot 10^{-3} \leq 10^{-2}.$$

Ainsi, 1,013 est une valeur approchée de S à 10^{-2} près.

Exercice 2 - La méthode de Newton - L1/Math Sup - **

1. La fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[a, b]$ sur l'intervalle $[f(a), f(b)]$. Puisque 0 est dans cet intervalle, il existe un unique $\gamma \in]a, b[$ tel que $f(\gamma) = 0$. On a de plus $\gamma \neq a$ et $\gamma \neq b$.
2. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en $(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pour $y = 0$, on trouve la valeur de x_1 qui est donc

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Puisque $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ sont positifs, on a $x_1 \leq x_0 = b$. De plus, puisque f'' est positive, la fonction f est convexe et la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes. En particulier, on a $f(x_1) \geq 0 = f(\gamma)$. Puisque f est croissante, ceci entraîne $x_1 \geq \gamma$.

3. Le procédé étant le même qu'à la question précédente, on montre par récurrence sur n que, pour chaque $n \geq 1$, on a

$$\gamma \leq x_n \leq x_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (x_n) est décroissante, minorée, elle est convergente, et sa limite est un élément de $[\gamma, b]$. De plus, la suite (x_n) vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, et φ étant continue sur $[a, b]$, elle converge vers un point fixe de φ dans $[a, b]$. Or, l'équation $\varphi(l) = l$ est équivalente à $f(l) = 0$, dont l'unique solution est γ . Ainsi, la suite (x_n) converge vers γ .

Exercices - Approximation de nombres réels - Calcul de valeurs approchées : corrigé

4. (a) Il s'agit simplement de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliqué à la fonction f entre x et γ . Il est légitime d'utiliser cette inégalité car f est de classe C^2 .
- (b) On applique la formule précédente avec $x = x_n$. Utilisant que $f(\gamma) = 0$, on obtient

$$|-f(x_n) - f'(x_n)(\gamma - x_n)| \leq \frac{1}{2} \max_{[a,b]} |f''| |x_n - \gamma|^2.$$

On divise cette inégalité par $|f'(x_n)|$, qui est un réel strictement positif, et on obtient

$$|x_{n+1} - \gamma| \leq \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{2|f'(x_n)|} |x_n - \gamma|^2 \leq \frac{1}{2} \frac{\max_{[a,b]} |f''|}{\min_{[a,b]} |f'|} |x_n - \gamma|^2.$$

5. Prouvons cette inégalité par récurrence sur n . Elle est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie au rang n et prouvons-la au rang $n + 1$. On a alors

$$k|x_{n+1} - \gamma| \leq k^2|x_n - \gamma|^2 \leq (k|x_0 - \gamma|)^{2^n \times 2} = (k|x_0 - \gamma|)^{2^{n+1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

6. La fonction $x \mapsto x^3 - 3$ vérifie très clairement les hypothèses. Reste à calculer k pour obtenir une estimation de l'erreur. Mais, $f'' = 2$ et $f'(x) = 2x \geq 3,4$ sur l'intervalle $[a, b]$. Ainsi, on peut prendre $k = \frac{1}{3,4}$. De plus, $|x_0 - \gamma| \leq 0,1$ et donc on a

$$k|x_n - \gamma| \leq \frac{1}{34^{2^n}}.$$

Si on cherche une valeur approchée à 10^{-20} près, on doit chercher n tel que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k \times 34^{2^n}} \leq 10^{-20} &\iff \frac{10^{20}}{k} \leq 34^{2^n} \\ &\iff \ln\left(\frac{10^{20}}{k}\right) \leq 2^n \ln 34 \\ &\iff \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{10^{20}}{k}\right)}{\ln 34}\right) \leq n. \end{aligned}$$

La valeur $n = 4$ convient, ce qui est très bon !

Exercice 3 - Valeur approchée de pi - L2/Math Spé - ★★

1. (a) Pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(x^{2n+1}/(2n+1))$ décroît vers 0. Par le critère des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ converge pour tout $x \in [0, 1]$ et son reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

On a majoré le reste par un terme, indépendant de $x \in [0, 1]$, et qui tend vers 0. On a donc convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0, 1]$. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ est continue sur $[0, 1]$, il en est de même de la somme de la

Exercices - Approximation de nombres réels - Calcul de valeurs approchées : corrigé

série, qui en particulier est continue en 1. La fonction arctan est elle aussi continue en 1. L'égalité

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

vraie pour $x \in [0, 1[$, reste donc vraie pour $x = 1$ par passage à la limite.

- (b) On l'a déjà démontré à la question précédente.
- (c) Il suffit de calculer la somme partielle de la série jusqu'à ce que $|R_n(1)| \leq 10^{-10}$. Ceci est vrai dès que $10^{10} \leq 2n+1$, soit pour $n \geq \frac{1}{2}10^{10}$. C'est beaucoup trop!
2. (a) Soit $A = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$. Alors, d'après la formule rappelée dans l'énoncé, on a

$$\tan(A) = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1 = \tan(\pi/4).$$

Ainsi, A et $\pi/4$ ont la même tangente. Ils sont donc égaux modulo π ! Mais, $0 \leq \arctan(1/2) \leq \arctan(1) \leq \pi/4$ et de même $0 \leq \arctan(1/3) \leq \pi/4$. Ainsi, on a $0 \leq A \leq \pi/2$. En particulier, $|A - \pi/4| \leq \pi/4$. C'est donc que $A = \pi/4$, puisqu'on savait déjà que $A = \pi/4 + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

- (b) On peut toujours majorer en utilisant le critère des séries alternées. On trouve

$$|R_n(1/2)| \leq \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} \leq \frac{1}{2^{2n+2}}$$

La majoration de $|R_n(1/3)|$ suit une méthode similaire.

- (c) On peut calculer $\pi/4$ en utilisant le début de chaque somme définissant $\arctan(1/2)$ et $\arctan(1/3)$. Pour avoir une approximation à 10^{-10} près, il suffira d'aller jusqu'à un entier n tel que $|R_n(1/2)| \leq \frac{1}{2}10^{-10}$ et $|R_n(1/3)| \leq \frac{1}{2}10^{-10}$. Remarquons que $\frac{1}{3^{2n+2}} \leq \frac{1}{2^{2n+2}}$ et que

$$\frac{1}{2^{2n+2}} \leq \frac{1}{2}10^{-10} \iff (2n+2)\ln(2) \geq \ln(2 \times 10^{10}).$$

Le calcul numérique donne $n \geq 16, 1$, soit un calcul de 17 termes de chaque série soit en tout 34 termes à calculer seulement. C'est beaucoup mieux!

Exercice 4 - Valeur approchée par comparaison à une intégrale - L2/Math Spé - ★

1. Soit $k \geq n+1$. Alors on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de $n+1$ à $+\infty$, on trouve

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2},$$

soit, après le calcul de l'intégrale,

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Exercices - Approximation de nombres réels - Calcul de valeurs approchées : corrigé

2. On a $|S - S_n| \leq \frac{1}{n}$, et donc pour approcher S à 10^{-4} près, il suffit de calculer S_{10^4} .
3. On a $S - v_n = R_n - \frac{1}{n+1}$ soit, d'après l'inégalité obtenue précédemment,

$$0 \leq S - v_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

On peut donc approcher S par $S_n + \frac{1}{n+1}$ à 10^{-4} près lorsque $n^2 \geq 10^4$, soit dès que $n \geq 100$.