Exercices - Formes linéaires - Dualité : corrigé

Exercice 1 - Une forme linéaire - *L1/Math Sup* - $\star$

f est donné par $f(x,y,z)=\alpha x+\beta y+\gamma z$. En calculant les valeurs de $f(1,1,1)=0$, etc... on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta+\gamma&=&0\\ 2\alpha+\gamma&=&1\\ \alpha+2\beta+3\gamma&=&4\end{array}\right.$$

On résoud ce système et on trouve $\alpha=-1$, $\beta=-2$ et $\gamma=3$. Ainsi, on a $f(x,y,z)=-x-2y+3z$. On en déduit

$$f(x,y,z)=0\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&-2y+3z\\ y&=&y\\ z&=&z\end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f)$ est donc donnée par la famille des deux vecteurs $(-2,1,0)$ et $(3,0,1)$.

Exercice 2 - Une base en dimension 2 - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Puisque $(\mathbb{R}^2)^*$ est de dimension 2, il suffit de montrer que la famille (f_1,f_2) est libre. Supposons qu'on a une relation
$$\lambda f_1+\mu f_2=0.$$
On la teste pour des valeurs de (x,y) particulières : pour $(x,y)=(1,0)$, puis $(x,y)=(0,1)$, on trouve successivement :
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda f_1(1,0)+\mu f_2(1,0)&=&0\\ \lambda f_1(0,1)+\mu f_2(0,1)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&0\\ \lambda-\mu&=&0\end{array}\right.$$
On prouve facilement que ceci implique $\lambda=\mu=0$, et donc que la famille (f_1,f_2) est libre, a fortiori une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.
2. Il est facile de voir que $(f_1+f_2)(x,y)=2x$, et donc $g=\frac12 f_1+\frac12 f_2$. Pour h, c'est un petit plus difficile. Il faut trouver λ et μ tels que, pour tous (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a
$$2x-6y=\lambda(x+y)+\mu(x-y)=(\lambda+\mu)x+(\lambda-\mu)y.$$
Par identification, on doit résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu&=&2\\ \lambda-\mu&=&-6\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}\lambda&=&-2\\ \mu&=&4.\end{array}\right.$$
Autrement dit, on a $h=-2f_1+4f_2$.

Exercice 3 - Base duale - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit M la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de (f_1^*,f_2^*,f_3^*) dans la base (e_1^*,e_2^*,e_3^*). Il suffit de prouver que le rang de la matrice M est égal à 3. Par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, on trouve que

$$\mathrm{rg}(M)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&-5&1\\1&-2&3\\1&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&-5&-13/2\\1&-2&0\\1&0&0\end{pmatrix}=3.$$

(f_1^*, f_2^*, f_3^*) est donc une base de E^*. Soit (f_1, f_2, f_3) la base dont elle est duale. Écrivons $f_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Alors, on a le système :

$$\begin{cases} f_1^*(f_1) = 2a + b + c = 1 \\ f_2^*(f_1) = -a + 0b + 2c = 0 \\ f_3^*(f_1) = a + 3b + 0c = 1. \end{cases}$$

Autrement dit, si on note C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

alors $f_1 = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient bien sûr la même chose pour f_2, f_3, et on trouve finalement que les coordonnées des f_i, exprimées dans la base e_1, e_2, e_3, sont les vecteurs colonnes de la matrice

$$C^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - Formes linéaires sur un espace de polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On pose $\phi_i(P) = P(x_i)$. Puisque ϕ et les ϕ_i sont des formes linéaires sur E, on demande de prouver que ϕ est dans l'espace vectoriel engendré par $\phi_0, \dots, \phi_n$. Il suffit de prouver que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une famille génératrice de E^*. Puisque $\dim(E^*) = \dim(E) = n + 1$ et que la famille comporte $(n+1)$ éléments, cela revient à démontrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une famille libre de E^*. Mais si $\lambda_0\phi_0 + \dots + \lambda_p\phi_p = 0$, alors on évalue le membre de droite pour le polynôme

$$P_j(X) = \prod_{k \neq j}(X - x_k).$$

Clairement, on a $\phi_i(P_j) = 0$ si $i \neq j$, et $\phi_j(P_j) = \prod_{k\neq j}(x_j - x_k) \neq 0$ sinon. Donc,

$$(\lambda_0\phi_0 + \dots + \lambda_p\phi_p)(P_j) = \lambda_j \prod_{k\neq j}(x_j - x_k) = 0,$$

ce qui entraîne $\lambda_j = 0$. La famille est donc libre, ce qui achève la preuve.

Exercice 5 - Formes linéaires multiplicatives sur les matrices - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit i, j, k, l dans $\{1, \dots, n\}$. On pose $A = E_{i,j}$ et $B = E_{k,l}$, de sorte que

$$AB = \delta_{j,k}E_{i,l} \text{ et } BA = \delta_{l,i}E_{k,j}.$$

On a donc

$$\delta_{j,k}\phi(E_{i,l}) = \delta_{l,i}\phi(E_{k,j}).$$

– pour $j = k$ et $i \neq l$, on a $\phi(E_{i,l}) = 0$;
– pour $j = k$ et $i = l$, on a $\phi(E_{i,i}) = \phi(E_{k,k})$.

Si on pose $\lambda = \phi(E_{1,1})$, on a donc $\phi(M) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$.

Exercice 6 - **Séparation** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Seule l'implication réciproque nécessite une preuve. Procédons par contraposée, et prouvons que si $x \neq y$, alors on peut construire $\phi \in E^*$ avec $\phi(x) \neq \phi(y)$. Supposons d'abord que la famille (x, y) est liée. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{vect}(x, y)$. Alors on définit une forme linéaire sur E en la définissant sur $\mathrm{vect}(x, y)$ par $\phi(ax+by) = a$ et sur F par $\phi(z) = 0$ pour tout $z \in F$. Alors, $\phi(x) = 1$ et $\phi(y) = 0$ et donc $\phi(x) \neq \phi(y)$. Si maintenant (x, y) est liée, on peut supposer $x \neq 0$ et $y = \lambda x$, $\lambda \neq 1$. Soit alors F un supplémentaire de $\mathrm{vect}(x)$. Alors on peut définir ϕ sur E par $\phi(x) = 1$ et $\phi(z) = 0$ si $z \in F$. On a alors $\phi(x) = 1$ et $\phi(y) = \lambda$ et donc $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Exercice 7 - **Intersection d'hyperplans** - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. On raisonne par récurrence sur p. Si $p = 1$, le résultat est connu : le noyau d'une forme linéaire non-nulle est un hyperplan de E. Supposons le résultat prouvé au rang p et prouvons-le au rang $p+1$. Alors, soit $E' = \bigcap_{i=1}^p \ker(f_i)$ et g_{p+1} la restriction de f_{p+1} à E'. Par hypothèse de récurrence, on sait que $\dim(E') \geq q - p$. D'autre part, $\bigcap_{i=1}^{p+1} \ker(f_i) = \ker(g_{p+1})$. Or, la dimension de $\ker(g_{p+1})$ est égale à celle de E' moins 1 si g_{p+1} est non-nulle, égale à celle de E' si g_{p+1} est nulle. Dans tous les cas, $\dim(E') \geq q-p-1 = q-(p+1)$. Supposons que les formes linéaires sont indépendantes. L'hypothèse de récurrence nous dit que $\dim(E') = q - p$. De plus, puisque les formes linéaires sont indépendantes, on n'a pas d'après le rappel
$$\bigcap_{i=1}^p \ker(f_i) \subset \ker(f_{p+1}).$$
Ceci signifie que g_{p+1} n'est pas nulle, et donc que $\dim(\ker(g_{p+1})) = \dim(E')-1 = q-p-1$. Enfin, si on sait que $\dim(F) = q - (p+1)$, notre argument montre que $\dim(E') = q - p$ et donc que les formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sont indépendantes. Si f_{p+1} était combinaison linéaire de $(f_1, \dots, f_p)$, alors g_{p+1} serait nulle et on aurait $\dim(F) = q - p$ ce qui n'est pas le cas. Donc f_{p+1} n'est pas combinaison linéaire de $(f_1, \dots, f_p)$ et la famille $(f_1, \dots, f_{p+1})$ est libre.
2. On applique le résultat de la question précédente à $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et aux formes linéaires $f_i(M) = \sum_{j=1}^n m_{i,j}$, où $M = (m_{i,j})$. Ces formes linéaires sont indépendantes. En effet, si
$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$
on applique cette égalité à la matrice élémentaire $E_{i,1}$, dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et 1-ère colonne, égal à 1. On a $f_i(E_{i,1}) = 0$ et $f_k(E_{i,1}) = 0$ si $k \neq i$. Ainsi, on obtient $\lambda_i = 0$ et la famille est libre. D'où $\dim(F) = n^2 - n$.
3. On démontre d'abord que les formes linéaires $(g_j)_{j=1,\dots,n-1}$ forment une famille libre. En effet, considérons une relation de liaison
$$\mu_1 g_1 + \dots + \mu_{n-1} g_{n-1} = 0.$$
On l'applique à des matrices particulières, mais il faut prendre garde désormais à ce qu'elles doivent appartenir à F. Considérons ici $M = E_{1,j} - E_{1,n}$. Alors $M \in F$ et $g_j(M) = 1$ et $g_k(M) = 0$ pour $k \neq j$. On obtient donc $\lambda_j = 0$, et la famille $(g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.

D'après le résultat de la première question :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n}\ker(f_i)\cap\bigcap_{j=1}^{n-1}\ker(g_j)\right)=n^2-n-(n-1)=(n-1)^2.$$

Reste à montrer que l'espace vectoriel considére est bien celui des matrices dont la somme de chaque colonne et la somme de chaque ligne sont nulles. Le point important est de vérifier que si $f_1(M)=\dots=f_n(M)=g_1(M)=\dots=g_{n-1}(M)=0$, alors $g_n(M)=0$. Mais il est facile de vérifier que

$$f_1+\dots+f_n-g_1-\dots-g_{n-1}=g_n$$

ce qui prouve le résultat d'après le rappel.
On ne pouvait pas appliquer le résultat de la première question directement à la famille $(g_j)_{j=1,\dots,n}$ car la famille $(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n)$ est liée.

Exercice 8 - Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ - *L2/Math Spé/Oral X/Agreg* - ⋆⋆⋆

1. Posons $T_{i,j}(M)=\mathrm{Tr}(E_{i,j}M)$, où $E_{i,j}$ est la matrice élémentaire avec 1 en (i,j) et 0 ailleurs. On va prouver que la famille des $(T_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. Puisque la famille comprend n^2 éléments, qui est aussi la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$, il suffit de prouver qu'il s'agit d'une famille libre. Mais si on a une combinaison linéaire $\sum_{i,j}\lambda_{i,j}T_{i,j}=0$, on évalue en E_{j_0,i_0}. Mais :
$$T_{i,j}(E_{j_0,i_0})=\mathrm{Tr}(\delta_{j,j_0}E_{i,i_0})=\begin{cases}1 & \text{si } i=i_0 \text{ et } j=j_0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$
On obtient donc $\lambda_{j_0,i_0}=0$, et donc la famille est libre.
Considérons maintenant $\varphi\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. φ s'écrit $\sum_{i,j}\lambda_{i,j}T_{i,j}$. En particulier, pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$\varphi(M)=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}T_{i,j}(M)=\mathrm{Tr}\big((\sum_{i,j}\lambda_{i,j}E_{i,j})M\big)=\mathrm{Tr}(AM)$$
où $A=\sum_{i,j}\lambda_{i,j}E_{i,j}$.
2. Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une matrice A non-nulle telle que $H=\ker T_A$, où T_A est défini par $T_A(M)=\mathrm{Tr}(AM)$. Soit r le rang de A. Alors A est équivalente à J_r, ie $A=PJ_rQ$ où
$$J_r=\begin{pmatrix}1&0&\dots&&&\\0&\ddots&0&\dots&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}.$$
On pose
$$N=\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\1&\ddots&&0\\&\ddots&\ddots&0\\&&1&0\end{pmatrix}.$$

N est inversible, et on a

$$\mathrm{Tr}(J_r N) = 0.$$

Pour $M = Q^{-1}NP^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} T_A(M) &= \mathrm{Tr}(PJ_rQQ^{-1}NP^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(J_rNP^{-1}P) \\ &= \mathrm{Tr}(J_rN) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où M est inversible, et $M \in H$.