EXERCICE 1 - Un exemple pratique - *Première année* - ⋆⋆

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g:[-1,1]\to[-1,1]$, $g(x)=f(x)$ est une bijection.

EXERCICE 2 - Implications... - *Première année* - ⋆

On considère 4 ensembles A,B,C et D, et des applications $f:A\to B$, $g:B\to C$ et $h:C\to D$. Montrer que

$$g\circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g\circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives }\big) \iff \big(f,g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

EXERCICE 3 - Image directe et injectivité - *Première année* - ⋆⋆

Soit $f:X\to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tous A,B de X, on a $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

EXERCICE 4 - Quelques exemples - *Première année* - ⋆

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n,\ f_2:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$

$$f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2,\ f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$

$$f_5:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto z^2.$$

EXERCICE 5 - Encore des exemples - *Première année* - ⋆

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto n+1$.
2. $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto n+1$.
3. $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+y,x-y)$.

EXERCICE 6 - Devinettes... - *Première année* - ⋆⋆⋆

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n;\ n\geq 1\}$ dans $\{1/n;\ n\geq 2\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$