EXERCICE 1 - Un exemple pratique - *Première année* - ⋆⋆

1. f n'est pas injective, car $f(2)=f(1/2)=4/5$. f n'est pas surjective, car $y=2$ n'a pas d'antécédent : en effet, l'équation $f(x)=2$ devient $2x=2(1+x^2)$ soit $x^2-x+1=0$ qui n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x)=y$ est équivalent à l'équation $yx^2-2x+y=0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta=4-4y^2\geq 0$, donc il y a des solutions si et seulement si $y\in[-1,1]$. Ainsi, on a exactement $f(\mathbb{R})=[-1,1]$.
3. Soit $y\in[-1,1]$. Les solutions possibles de l'équation $g(x)=y$ sont $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La deuxième solution n'appartient pas à $[-1,1]$. D'autre part, $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$ est dans $[-1,1]$. L'équation $g(x)=y$ admet donc une unique solution avec $x\in[-1,1]$. Nous avons bien prouvé que g est une bijection.

EXERCICE 2 - Implications... - *Première année* - ⋆

Première implication : si $f(a)=f(b)$, alors $g\circ f(a)=g\circ f(b)$, et puisque $g\circ f$ est injective, on en déduit $a=b$.
Deuxième implication : soit $y\in C$. Puisque $g\circ f$ est surjective, il existe $a\in A$ avec $g\circ f(a)=y$. Posons $b=f(a)$. On a alors $g(b)=y$, ce qui prouve que g est surjective.
Equivalence : d'abord, si f, g et h sont bijectives, la composée d'applications bijectives étant bijective, on en déduit que $g\circ f$ et $h\circ g$ sont bijectives. Réciproquement, puisque $g\circ f$ est bijective, elle est surjective, et on trouve que g est surjective. D'autre part, puisque $h\circ g$ est bijective, elle est injective et donc g est injective. On trouve donc que g est bijective. Puisque $g\circ f$ est bijective, composant par g^{-1} à gauche qui est bijective, f est bijective.

EXERCICE 3 - Image directe et injectivité - *Première année* - ⋆⋆

1 $\implies$ 2 : D'abord, une inclusion est toujours vérifiée : prenons en effet $y=f(A\cap B)$. Alors il existe $x\in A\cap B$ tel que $y=f(x)$. Mais alors, $y\in f(A)$ puisque $y=f(x)$ avec $x\in A$. De même, $y\in f(B)$. On en déduit que $y\in f(A)\cap f(B)$. Réciproquement, si $y\in f(A)\cap f(B)$, alors il existe $a\in A$ tel que $y=f(a)$ et $b\in B$ tel que $y=f(b)$. Mais puisque f est injective, on a $a=b$, et donc $a\in A\cap B$. On en déduit que $y\in f(A\cap B)$.

2 $\implies$ 1 : Soit a et b tels que $f(a)=f(b)=y$. Prenons $A=\{a\}$ et $B=\{b\}$. Remarquons que $f(A)=f(B)=\{y\}$. Alors, on a $f(A\cap B)=\{y\}$. En particulier, $A\cap B\neq\varnothing$, et donc $a=b$.

EXERCICE 4 - Quelques exemples - *Première année* - ⋆

f_1 est injective, non surjective (et donc non bijective) : 1 n'a pas d'antécédents. f_2 est bijective. f_3 n'est ni injective ($f(-1)=f(1)=1$), ni surjective (-1 n'a pas d'antécédent). f_4 et f_5 sont surjectives, mais non injectives.

EXERCICE 5 - Encore des exemples - *Première année* - ⋆

1. f est clairement injective, mais n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent.
2. g est bijective : l'équation $n+1=k$, avec $k\in\mathbb{Z}$ admet une unique solution $n\in\mathbb{Z}$ qui vaut $n=k-1$.

3. h est bijective : prenons en effet un couple (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$, et essayons de résoudre le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & x_1 \\ x-y & = & y_1 \end{array}\right.$$
Ce système possède une unique solution, donnée par $= (x_1+y_1)/2$ et $y = (x_1-y_1)/2$. L'application est bijective.

EXERCICE 6 - Devinettes... - *Première année* - ⋆⋆⋆

1. Posons $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, définie par $f(n) = n+1$. Remarquons f est bien à image dans $\mathbb{N}^*$. Il reste à prouver que f est bijective, ce qui est très facile avec la définition : si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(k) = n \iff k+1 = n \iff k = n-1$, l'équation $f(k) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{N}$, ce qui dit bien que f est bijective.
2. Posons $g : \{1/n;\ n \geq 1\} \to \{1/n;\ n \geq 2\}$, définie par $g(1/n) = 1/(n+1)$. Remarquons là aussi que l'ensemble d'arrivée est bien cohérent avec l'ensemble de départ. D'autre part, g est bijective.
3. C'est plus compliqué ! ! ! Ecrivons $[0,1] = \{1/n;\ n \geq 1\} \cup A$, où A est le complémentaire de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $[0,1]$. On définit h de la façon suivante :
   – Si $x = 1/n$, alors $h(x) = 1/(n+1)$.
   – Sinon, c'est-à-dire si $x \in A$, $h(x) = x$.
   Alors h est bijective ! Prouvons d'abord qu'elle est injective : si $h(x) = h(x')$, on distingue 3 cas :
   – Si $x \in A$ et $x' \in A$, alors $h(x) = x$ et $h(x') = x'$ ce qui entraîne $x = x'$.
   – Si $x \in A$ et $x' \notin A$, écrivant $x' = 1/k$, on a $x = h(x) = h(x') = 1/(k+1)$, ce qui implique $x \notin A$, ce qui est impossible.
   – Si $x \notin A$ et $x' \notin A$, écrivant $x = 1/k$ et $x' = 1/n$, on a $1/(k+1) = h(x) = h(x') = 1/(n+1)$ ce qui entraîne $k+1 = n+1$ et par suite $x = x'$.
   Dans tous les cas possibles, on trouve $x = x'$, et h est injective. Prouvons maintenant que h est surjective, et choisissons $y \in [0,1[$. Si $y \in A$, en particulier $y \neq 1$, et on a $h(y) = y$. Si $y \notin A$, $y = 1/n$, où n est entier strictement plus grand que 1 puisque $y \neq 1$. On a alors $h(1/(n-1)) = y$. Dans tous les cas, y possède un antécédent, ce qui prouve que h est surjective.
4. Rappelons que tout entier peut s'écrire $2k$ s'il est pair, et $2k+1$ s'il est impair. Posons $f(2k) = k$, et $f(2k+1) = -k$. Reste à vérifier que f est bijective, ce qui est laissé au lecteur !