

Exercice 1 - Automorphisme qui transforme une transposition en une transposition - $L3$ - ★★★

1. Il est facile de remarquer que deux transpositions commutent si et seulement si elles ont un support disjoint. Si $\phi(t_2)$ et $\phi(t_3)$ commutaient, alors on aurait $t_2t_3 = \phi^{-1}(\phi(t_2)\phi(t_3)) = \phi^{-1}(\phi(t_3)\phi(t_2)) = t_3t_2$ et donc t_2 et t_3 commuteraient elles aussi. $\phi(t_2)$ et $\phi(t_3)$ n'ont donc pas un support disjoint ce qui donne immédiatement le résultat.
2. Le support de $\phi(t_i)$ n'est pas disjoint de $\phi(t_2)$ pas plus que de celui de $\phi(t_3)$. Il y a donc deux possibilités.
 - ou bien $\phi(t_i) = (a_1 a_i)$, ce qui est le résultat voulu.
 - ou bien $\phi(t_i) = (a_2 a_3)$. Mais dans ce cas,

$$\phi(t_2)\phi(t_3)\phi(t_i) = (a_1 a_2) \circ (a_1 a_3) \circ (a_2 a_3) = (a_1 a_3) = t_2,$$

ce qui entraîne $(1\ 2)(1\ 3)(1\ i) = (1\ 3)$. Cette dernière propriété est fausse et cette alternative est donc impossible.

3. Si les a_i n'étaient pas tous distincts, alors ϕ ne saurait être bijective.
4. On a $s(1\ i)s^{-1} = (s(1)\ s(i)) = (a_1 a_i)$. ϕ et l'automorphisme intérieur associé à s coïncident donc sur les éléments t_i . Puisque ces éléments engendrent S_n , ϕ est donc l'automorphisme intérieur associé à s .