Théorème de Tychonov

Frédéric Bayart*

Nous allons dans cet article démontrer le théorème de Tychonov : Un produit d'espaces compacts est compact. Ce théorème est assez facile à démontrer dans un cas particulier : celui du produit dénombrable d'espaces métriques compacts. Le but est ici de généraliser cette démarche. D'abord, nous allons réétudier de manière précise ce qu'est la topologie produit. Ensuite, nous introduirons la notion de filtres, qui est aux espaces topologiques ce que sont les suites aux espaces métriques. En chemin, nous parlerons des ultrafiltres qui permettent de caractériser la compacité. Il sera alors facile d'en déduire le théorème de Tychonov.

1 Rappels et compléments de topologie

1.1 Topologie produit

Soit I un ensemble, $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques non vides. On pose $X = \Pi_{i\in I} X_i$. Pour $i \in I$, on note $p_i : X \to X_i$ la projection.

Définition 1 *On appelle* topologie produit sur *X la topologie la moins fine (ie avec le moins d'ouverts) pour laquelle les applications p_i sont continues.*

Une telle topologie $\mathcal{T}_0$ sur X existe. En effet, la topologie discrète rend continue les p_i (tout ensemble est ouvert pour cette topologie), et une intersection de topologies est une topologie. On a donc $\mathcal{T}_0 = \cap \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ décrit l'ensemble des topologies sur X rendant les p_i continues.

Désormais, X sera toujours considéré muni de la topologie produit. On va décrire les ouverts de X. On a une caractérisation simple :

Théorème 1 *Soit $J \subset I$ une partie finie, et pour tout $j \in J$, U_j un ouvert de X_j. Alors :*

a. $O = \{x \in X / \forall j \in J,\ p_j(x) \in U_j\}$ est un ouvert de X.

b. Les ouverts de X sont réunions d'ouverts de cette forme (dits ouverts élémentaires*).*

Démonstration :

a. On a $O = \displaystyle\bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j)$, qui est donc ouvert comme intersection finie d'ouverts.

b. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions quelconques d'ouverts élémentaires. Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}$ forme une topologie (ie $\mathcal{T}$ contient X, $\varnothing$, est stable par intersection finie et par réunion quelconque). En outre $\mathcal{T}$ rend continue toutes les applications p_i par définition des ouverts élémentaires. On a donc $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$.
Réciproquement, $\mathcal{T}_0$ contient tous les ouverts élémentaires puisque $p_j^{-1}(U_j)$ est ouvert de $\mathcal{T}_0$ par définition. On conclut car $\mathcal{T}_0$ est stable par intersection finie, puis par réunion quelconque.

□

Notre but est de montrer que si tous les X_i sont compacts, alors X est compact. Rappelons qu'un espace topologique est compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Une première vérification nous est accessible :

Proposition 2 *X est séparé si, et seulement si, pour tout $i \in I$, X_i est séparé.*

*frederic.bayart@free.fr

FIG. 1 – *Un mauvais choix des antécédents*

FIG. 2 – *Un bon choix des antécédents*

Démonstration :

$\Longleftarrow$) Soit $x \neq y \in X$. Nécessairement, $\exists i \in I / p_i(x) \neq p_i(y)$. Comme X_i est séparé, il existe U_i ouvert contenant $p_i(x)$ et V_i ouvert contenant $p_i(y)$ tels que $U_i \cap V_i \neq \varnothing$. Mais alors, $p_i^{-1}(U_i)$ (resp. $p_i^{-1}(V_i)$) est un voisinage de x (resp. de y), et ces deux ouverts sont disjoints. X est donc séparé.

$\Longrightarrow$) C'est plus compliqué... Soit $i \in I$, on fixe $a \neq b \in X_i$. Il faut prendre un antécédent de a et b dans X, et essayer de "transporter" les voisinages distincts obtenus. Les deux figures 1 et 2 montrent qu'on ne peut choisir n'importe quel antécédent si on veut que les deux voisinages "ne se coupent pas suivant l'axe des X_i".

Comme chaque espace topologique X_j est supposé non vide, il existe $x_j \in X_j$, et on considère les éléments x, y de X tels que $\forall j \neq i$, $p_j(x) = p_j(y) = x_j$, $p_i(x) = a$, $p_i(y) = b$. Comme X est séparé, il existe des ouverts, qu'on peut toujours choisir élémentaires, U et V, voisinages respectifs de x et y avec $U \cap V = \varnothing$. On écrit :

$$U = \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(U_j), \quad V = \bigcap_{j \in J} p_j^{-1}(V_j) \text{ où } J \text{ est fini.}$$

D'abord, remarquons que $\forall j \in J$, $j \neq i$, $x_j = p_j(x) = p_j(y) \in U_j \cap V_j$. Nécessairement, cela prouve que

$i \in J$, sinon U et V ne pourraient être disjoints.
Alors, $U_i \cap V_i = \varnothing$. En effet, si $z \in U_i \cap V_i$, alors U et V ne sauraient être disjoints: l'élément t de X tel que $p_j(t) = x_j$, $p_i(t) = z$ serait dans l'intersection. Comme U_i contient $p_i(x) = a$, et V_i contient b, il est désormais clair que X_i est séparé.

□

1.2 Théorème de Tychonov, forme faible

Dans ce paragraphe, $I = \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (X_n,d_n) est un espace métrique compact, et X est le produit des X_n, muni de la topologie produit. Si $x \in X$, on notera $x_n = p_n(x)$.

Théorème 3 *Sous les hypothèses précédentes, X est compact.*

Démonstration : On va montrer que X est métrisable, et on va utiliser un procédé diagonal pour prouver que X est compact.

Fait 1 : X est métrisable. On définit, sur $X \times X$, l'application d par:

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\inf(1,d_n(x_n,y_n))}{2^{n+1}}.$$

On vérifie sans peine que d est une distance sur X (par exemple, $d(x,y) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n,y_n) = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = y_n \implies x = y$). Montrons que la topologie induite par d est la topologie produit:

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{2^{n+1}}$. Dès que $d(x,y) < \varepsilon$, alors $d_n(x_n,y_n) \leq 1$, et par suite $d_n(x_n,y_n) < 2^{n+1}d(x,y)$. Ceci prouve que les (p_n) sont continues, et que la topologie induite par d est plus fine que la topologie produit.
- Soit $x \in X$, et V un voisinage de x pour la topologie de d. V contient une boule $B = \{y \in X;\ d(x,y) \leq \varepsilon\}$. Il reste à prouver que B contient un voisinage de x pour la topologie produit. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n>N} 2^{-(n+1)} < \varepsilon/2$. Alors $\prod_{n \leq N} p_n^{-1}(B_n(x_n,\varepsilon/2))$ est inclus dans B:

$$\text{si } y \in \prod_{n \leq N} p_n^{-1}(B_n(x_n,\varepsilon/2)), \quad d(x,y) \leq \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{d(x_n,y_n)}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{\varepsilon/2}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Fait 2 : X est compact. Comme X muni de la topologie produit est métrisable, on va utiliser la caractérisation de Bolzano-Weierstrass de la compacité. Soit donc $(x^{(k)})$ une suite de points de X. On va construire par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une suite I_n de parties de $\mathbb{N}$ telles que:

- I_n est infini.
- $I_{n+1} \subset I_n$
- $\min(I_{n+1}) > \min(I_n)$
- $(p_n(x^{(k)}))_{k \in I_n}$ converge vers $x_n \in X_n$.

Pour $n = 0$, la suite $(p_0(x^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite du compact X_0, elle admet donc une valeur d'adhérence x_0. Supposons maintenant construits $I_0,\ldots,I_n$, alors $(p_{n+1}(x^{(k)}))_{k \in I_n}$ est une suite du compact X_{n+1}. Elle admet une sous-suite qui converge vers un élément x_{n+1}. On construit facilement I_{n+1} vérifiant les propriétés voulues, quitte à retirer le premier terme de la suite extraite.
On pose alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k = \min(I_k)$. La suite $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est alors une suite extraite de $(x^{(k)})_{k \in I_n}$ dès que $k \geq n$. On en déduit que $(p_n(x^{(n_k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x_n. On pose $x \in X$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x_n$. La suite $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans X vers x. En effet: si $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n>N} 2^{-(n+1)} < \varepsilon/2$, on a:

$$d(x^{(n_k)},x) \leq \sum_{0 \leq n \leq N} \frac{d(x_n^{(n_k)},x_n)}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Mais il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq k_0 \implies d(x_n^{(n_k)},x_n) < \varepsilon/2$ pour $0 \leq n \leq N$. Alors $d(x^{(n_k)},x) \leq \varepsilon$.

□

REMARQUE - La démonstration précédente porte le nom de *procédé diagonal*, à la base par exemple également du théorème d'Ascoli. Si on représente le procédé d'extraction dans un tableau, en première colonne on écrit la première suite extraite, telle que son image par p_0 converge vers x_0, dans la deuxième colonne, on écrit la suite extraite de la précédente, telle que son image par p_1 converge vers x_1,etc... La suite extraite choisie est la suite des éléments de la diagonale. Pour chaque n, son image par p_n converge vers x_n.

1.3 Topologie et suites

Il est bien connu que dans un espace métrique, la convergence des suites définit la topologie. Expliquons-nous. On rappelle l'énoncé suivant :

Proposition 4 *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$. A est fermé ssi pour toute suite de points de A qui converge vers $l \in E$, alors en fait $l \in A$.*

Dans un espace métrique, les suites caractérisent les fermés, donc les ouverts, donc la topologie de l'espace métrique. Toute propriété topologique peut donc s'écrire en termes de suites convergentes.

Dans un espace topologique général (non métrisable), ce n'est plus le cas. Prenons l'exemple suivant : Sur $\mathbb{R}$, on définit la topologie $\mathcal{T}_1$ en prenant pour ouvert de $\mathcal{T}_1$ l'ensemble vide, et toute partie dont le complémentaire est fini ou dénombrable (ex : ceci définit une topologie sur $\mathbb{R}$). Soit (u_n) une suite convergente pour $\mathcal{T}_1$ de limite a. On note :

$$U = \{u_n / n \in \mathbb{N}\} \quad V = (\mathbb{R} - U) \cup \{a\}$$

V^c est inclus dans U, donc est dénombrable et V est un voisinage de a. Mais alors, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/n \geq n_0 \implies u_n \in V$. Comme u_n est aussi élément de U, la suite est stationnaire à partir d'un certain rang.

Munissons maintenant $\mathbb{R}$ de la topologie discrète $\mathcal{T}_2$. Les suites convergentes pour cette topologie sont là-aussi les suites stationnaires. Mais $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont deux topologies distinctes : par exemple $\{a\}$ est ouvert pour $\mathcal{T}_2$, pas pour $\mathcal{T}_1$. Ainsi, ces deux espaces *topologiques* ont mêmes suites convergentes, mais pas les mêmes topologies.

Remarquons que cela implique que certaines propriétés topologiques ne peuvent plus s'exprimer en termes de suites :

EXEMPLE - L'injection canonique $j : (\mathbb{R},\mathcal{T}_1) \to (\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ n'est pas continue ($j^{-1}\{a\} = \{a\}$ n'est pas ouvert). Pourtant, pour toute suite (x_n) qui tend vers a pour $\mathcal{T}_1$ (et donc qui stationne en a), alors $j(x_n)$ converge aussi vers a (pour $\mathcal{T}_2$).

En ce qui concerne la compacité, on a les faits suivants :

i Si X est un espace métrique, X est compact ssi toute suite possède une sous-suite convergente.

ii Un espace topologique dans lequel toute suite possède une sous-suite convergente n'est pas nécessairement compact.

iii Dans un espace topologique compact, il peut exister des suites qui ne possèdent aucune sous-suite convergente.

C'est grâce aux filtres qu'on va pouvoir s'affranchir de la limite des suites convergentes.

2 Filtres

2.1 Définitions

Définition 2 *Soit X un ensemble. Un* filtre *$\mathcal{F}$ sur X est une famille non vide de parties de X telle que :*

1. $\forall A,B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$
2. $\varnothing \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$
3. *Si* $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B \subset X$, *alors* $B \in \mathcal{F}$

Exemples -

1. Soit $A \subset X$, $A \neq \varnothing$. Alors $\{B \subset X / A \subset B\}$ est un filtre sur X.
2. Soit X un ensemble infini. Alors $\{A \subset X / A^c \text{ fini}\}$ est un filtre sur X. En effet : $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ est fini. $\varnothing$ est de complémentaire infini, tandis que le complémentaire de X est fini, et si $A \subset B$, alors $B^c \subset A^c$. Lorsque $X = \mathbb{N}$, on appelle ce filtre *filtre de Fréchet.* On verra plus loin son lien avec les suites convergentes.
3. Soit X un espace topologique, $x_0 \in X$. L'ensemble ν_{x_0} des voisinages de x_0 est un filtre sur X (les vérifications sont immédiates). Plus généralement, l'ensemble des voisinages d'une partie quelconque non vide de X est un filtre.
4. Soit $(X, \leq)$ un ensemble muni d'un ordre partiel, filtrant croissant (ie si $x,y \in X$, $\exists z \in X / z \geq x$ et $z \geq y$). Soit $x \in X$. On définit $A_x = \{y \in X / y \geq x\}$. Alors $\{B \subset X / \exists x \in X,\ A_x \subset B\}$ est un filtre sur X. Si X est $\mathbb{N}$ muni de son ordre naturel, on retrouve le filtre de Fréchet.

Nous allons avoir besoin de mettre un ordre sur les filtres.

Définition 3 *Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux filtres sur X. On dit que $\mathcal{F}_1$ est* plus fin que *$\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.*

On obtient ainsi une relation d'ordre sur les filtres d'un ensemble. En outre, cet ordre est inductif. En effet, si $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est un ensemble de filtres sur I tel que $\forall i \neq j$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$, alors $\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est encore un filtre sur X, qui majore (est plus fin que) tous les $\mathcal{F}_i$.

Il y a un lien fort entre la notion de filtre plus fin que et celle de suite extraite. Pour s'en convaincre, on pourra examiner les théorèmes 9 et 11 et étudier des filtres plus fins que le filtre de Fréchet.

Nous allons encore avoir besoin d'une autre propriété algébrique sur les filtres, la notion de *filtre engendré par une partie.*

Proposition 5 *Soit σ une collection de parties de X. Il existe un filtre sur X contenant σ ssi toute intersection finie d'éléments de σ est non vide.*

Démonstration : La condition est nécessaire, au vu des axiomes 1 et 2 de la définition des filtres.

Réciproquement, on pose $\sigma' = \{A_1 \cap \cdots \cap A_p,\ A_i \in \sigma\}$. Alors $\mathcal{F} = \{B \in X / \exists A \in \sigma',\ A \subset B\}$ est un filtre sur X contenant σ. En effet :

1. Si $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$, avec $A_i \in \sigma'$, alors $B_1 \cap B_2 \supset A_1 \cap A_2 \in \sigma'$.
2. Par hypothèse, σ n'est pas vide, et si $A \in \sigma$, alors $X \supset A$ est élément de $\mathcal{F}$. Si $\varnothing$ était élément de $\mathcal{F}$, alors il serait élément de σ', ce qui est faux par hypothèse.
3. Cet axiome est clairement vérifié.

$\square$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 6 *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X, $A \subset X$. Il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ contenant A ssi $\forall F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \varnothing$.*

2.2 Ultrafiltres

Définition 4 *On dit que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X si c'est un filtre maximal pour l'inclusion.*

Ce sont ces filtres maximaux qui vont caractériser les propriétés topologiques. Remarquons déjà qu'il existe des ultrafiltres. En effet, on a vu que l'ordre $(\subset)$ mis sur les filtres est inductif. D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal dans l'ensemble des filtres sur X. Un tel élément est un ultrafiltre.

On peut même aller un peu plus loin. Si par exemple $\mathcal{F}$ est un filtre sur X, en appliquant toujours le lemme de Zorn, on voit qu'il existe un ultrafiltre sur X qui est plus fin que $\mathcal{F}$. Et, en appliquant les résultats sur les filtres engendrés par une partie, on voit que si $A \subset X$ vérifie $\forall F \in \mathcal{F}$, $A \cap F \neq \varnothing$, alors il existe un ultrafiltre sur X contenant $\mathcal{F}$ et A.

Pour les courageux, on dispose d'une caractérisation algébrique des ultrafiltres à l'aide de la proposition suivante (ce résultat ne sera pas utilisé par la suite) :

Proposition 7 *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Alors $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\forall A \subset X$, $A \in \mathcal{F}$ ou $A^c \in \mathcal{F}$.*

Démonstration :

$\Longrightarrow$) Si A est une partie de X telle que ni A, ni A^c n'appartiennent à $\mathcal{F}$. Alors $\forall F \in \mathcal{F}$, on a $F \cap A \neq \varnothing$, sinon $F \subset A^c$, et $A^c \in \mathcal{F}$. D'après le corollaire 6, il existe un filtre contenant $\mathcal{F}$ et A, qui est donc strictement plus fin que $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ n'est alors pas un ultrafiltre.

$\Longleftarrow$) On suppose que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X vérifiant la condition énoncée, et qu'il existe un filtre $\mathcal{U}$ strictement plus fin que $\mathcal{F}$. On considère alors $B \in \mathcal{U}$ tel que $B \notin \mathcal{F}$. Nécessairement, $B^c \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, et donc $\varnothing = B \cap B^c \in \mathcal{U}$: c'est absurde.

□

Avant de retourner à la topologie, il nous reste encore à étudier *l'image directe* d'un filtre, qui servira par exemple à caractériser la continuité de fonctions.

Proposition 8 *Soit $f : X \to Y$, et $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Alors $f(\mathcal{F}) = \{B \subset Y / \ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est un filtre sur Y, et c'est un ultrafiltre si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.*

Définition 5 *$f(\mathcal{F})$ s'appelle* image directe *du filtre $\mathcal{F}$ par f.*

Démonstration : Il ne s'agit que de permuter les images réciproques avec les intersections... Dans le cas des ultrafiltres, on peut utiliser la proposition précédente. □

2.3 Convergence des filtres

Nous voila enfin dans le domaine de la topologie, puisque nous allons donner un sens à $\mathcal{F}$ converge vers $l \in X$. X désigne désormais un espace topologique.

Définition 6 *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X, $x \in X$. On dit que :*

– *x est* point d'adhérence *de $\mathcal{F}$ si $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \bar{A}$.*

– *$\mathcal{F}$* converge vers *x si $\mathcal{F}$ est plus fin que ν_x (le filtre de tous les voisinages de x).*

Remarquons que si X est séparé, la limite est nécessairement unique (car alors si $x \neq y$, x et y possèdent des voisinages disjoints et ces voisinages ne peuvent être simultanément dans le filtre).

Proposition 9 *Les assertions suivantes sont vérifiées :*

i Si $\mathcal{F}$ converge vers x, alors x est point d'adhérence de mcf.

ii Si x est point d'adhérence de $\mathcal{F}$, alors il existe un filtre plus fin qui converge vers x.

iii Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, si l est valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$, alors l est limite de $\mathcal{U}$.

Démonstration :

i Soit $A \in \mathcal{F}$, alors $A \cap V \neq \varnothing$ si $V \in \nu_x$, et donc $x \in \bar{A}$.

ii Comme x est point d'adhérence de $\mathcal{F}$, on peut d'après la proposition 5 considérer le filtre engendré par $\mathcal{F}$ et ν_x. Alors ce filtre converge vers x.

iii On applique le point précédent, sachant que $\mathcal{U}$ n'admet pas de filtre strictement plus fin.

□

REMARQUE - Cette proposition est capitale. Remarquons dans le point ii la similitude avec les suites qui admettent une valeur d'adhérence et les suites extraites (pour les espaces métriques).

2.4 Filtres et continuité

La lecture de ce paragraphe n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème de Tychonov. Mais elle permet de mieux appréhender les liens entre topologie et convergence des filtres.

Dans ce paragraphe, Y désigne un espace topologique séparé, et X un espace filtré. Soit $\varphi \ : (X,\mathcal{F}) \to Y$.

Définition 7 *On dit que φ admet pour limite $l \in Y$ selon $\mathcal{F}$ si $\nu_l \subset \varphi(\mathcal{F})$.*

(ie si l'image directe du filtre $\mathcal{F}$ converge vers l).
On va reformuler cette définition pour la rapprocher de la définition usuelle de limite d'une fonction.
Proposition 10 *φ admet pour limite $l \in Y$ selon $\mathcal{F}$* $\iff \forall V \in \nu_l, \exists F \in \mathcal{F}/\varphi(F) \subset V$.
Démonstration :
$\Longleftarrow$ **)** Si $V \in \nu_l$. Alors $\exists F \in \mathcal{F}/\varphi(F) \subset V$. On a donc $F \subset \varphi^{-1}(\varphi(F)) \subset \varphi^{-1}(V)$. Ceci implique que $\varphi^{-1}(V) \in \mathcal{F}$, ce qui est exactement la définition de $V \in \varphi(\mathcal{F})$.
$\Longrightarrow$ **)** Si $V \in \nu_l$, on a en particulier que $V \in \varphi(\mathcal{F})$, ie $F = \varphi^{-1}(V) \subset \mathcal{F}$, et alors $\varphi(F) = V \subset V$.
□
EXEMPLES -

- Si $X = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}$ est le filtre de Fréchet (ensemble des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}$), alors :
$$\varphi \text{ converge vers } l \iff \forall V \in \nu_l, \exists F \in \mathcal{F}/\varphi(F) \subset V$$
Mais F est le complémentaire d'un ensemble fini, en particulier il existe un $n_o \in \mathbb{N}$ tel que F contienne $\{n \geq n_0/n \in \mathbb{N}\}$, et donc $n \geq n_0 \implies \varphi(n) \in V$. On retrouve donc la convergence des suites par la convergence de l'image directe du filtre de Fréchet. Ainsi, la convergence des filtres contient la convergence des suites. Par exemple, dire que dans un espace topologique Y, tout filtre admet une valeur d'adhérence implique en particulier que toute suite de Y admet une valeur d'adhérence. La compacité approche...
- Si X est lui aussi un espace topologique, et $\mathcal{F}$ est le filtre des voisinages de x, le résultat précédent se traduit par :
$$\varphi \text{ admet pour limite } l \in Y \text{ selon } \mathcal{F} \iff \varphi \text{ admet une limite en } x \text{ qui vaut } l$$
(la deuxième assertion étant à prendre au sens topologique usuel du terme).

2.5 Filtres et compacité

Nous voici au cœur du sujet. On l'a rappelé, la compacité d'un espace topologique n'est pas équivalente au fait que toute suite possède une sous-suite convergente (aucune des implications n'est vraie). Nous allons ici remplacer les suites par les filtres, éclairés par le fait que la convergence des suites est un cas particulier de la convergence des filtres. Le théorème suivant est la clef de voûte de la démonstration du théorème de Tychonov.
Théorème 11 *Soit X un espace topologique séparé. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
i X est compact.
ii Tout filtre sur X admet une valeur d'adhérence.
iii Tout ultrafiltre sur X converge.
Démonstration :
i $\Longrightarrow$ ii) Supposons que $\mathcal{F}$ est un filtre sur X sans valeur d'adhérence. On a alors $\cap_{\mathcal{F}} \bar{A} = \varnothing$. Par compacité de X, on se ramène à une intersection finie vide, $\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_p = \varnothing$. Mais alors $A_i \in \mathcal{F}$, donc $\bar{A}_i \in \mathcal{F}$, ce qui nie le fait le fait qu'un filtre est stable par intersection finie.
ii $\Longrightarrow$ iii) On a déjà démontré ce résultat : si un ultrafiltre admet une valeur d'adhérence l, alors il converge vers l.
iii $\Longrightarrow$ i) On utilise la propriété duale de Borel-Lebesgue. On suppose que X n'est pas compact, d'où l'existence de $(A_i)_{i \in I}$ tels que :
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \varnothing, \ A_i \text{ est fermé et toute intersection finie des } A_i \text{ est non vide.}$$
D'après la proposition 5, on peut considérer $\mathcal{F}$ le filtre engendré par les A_i, et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{F}$. Soit l la limite de $\mathcal{U}$. En particulier, l est valeur d'adhérence de $\mathcal{U}$, et donc $\cap_{A \in \mathcal{U}} \bar{A} \neq \varnothing$. En particulier, les A_i étant fermés et éléments de $\mathcal{U}$, on a : $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$. C'est absurde.
□
On peut remarquer la simplicité de cette démonstration (par comparaison par exemple avec l'équivalence entre les propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass pour les espaces métriques).

3 Le théorème de Tychonov

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On note X le produit des X_i, muni de la topologie produit, $p_i : X \to X_i$ les projections. Pour démontrer le théorème de Tychonov, il nous reste à établir le lien entre la convergence des filtres sur les X_i et la convergence des filtres sur X. C'est le but du lemme suivant :

Lemme 12 *Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur X. Alors il converge vers $x \in X$ si et seulement si $\forall i \in I$, $p_i(\mathcal{F})$ converge vers $p_i(x)$.*

Démonstration :

$\Longrightarrow$) Par définition, $\nu_x \subset \mathcal{F}$. Soit V_i un voisinage de $p_i(x)$. Alors $p_i^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X contenant x, et donc $p_i^{-1}(V_i) \in \nu_x \subset \mathcal{F}$, ce qui est la définition de $V \in p_i(\mathcal{F})$.

$\Longleftarrow$) Soit O un ouvert élémentaire voisinage de x, ie $O = \bigcap_{j\in J} \{y \in X/p_j(y) \in U_j\} = \bigcap_{j\in J} p_j^{-1}(U_j)$ où $J \subset I$ est fini, U_j est un voisinage de $p_j(x)$. On a donc $U_j \in p_j(\mathcal{F}) \implies p_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F}$, et donc c'est aussi le cas pour O par stabilité par intersection finie.
Si U est un ouvert quelconque contenant x, U contient toujours un tel ouvert élémentaire et est donc élément de $\mathcal{F}$.

□

C'est presque fini...

Théorème 13 *Sous les notations précédentes, X est compact $\iff \forall i \in I$, X_i est compact.*

Démonstration : L'implication $\Longrightarrow$ est classique : p_i est continue, et X_i est séparé (car X est séparé). X_i est donc compact.
Pour la réciproque, on considère $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X. Alors, on sait que $p_i(\mathcal{U})$ est un ultrafiltre sur X_i, qui converge vers x_i par compacité de X_i. On définit x avec $p_i(x) = x_i$. Appliquant le lemme, on en déduit que $\mathcal{U}$ converge vers x. C'est bien que X est compact. □

Derrière l'apparente simplicité de cette démonstration se cache un arguent choc : le lemme de Zorn, qui nous donne l'existence des ultrafiltres. On pourra en effet remarquer qu'on ne peut modifier la preuve précédente afin d'utiliser la caractérisation de la compacité par les valeurs d'adhérence des filtres. C'est normal : il est établi que le lemme de Zorn est équivalent au théorème de Tychonov.